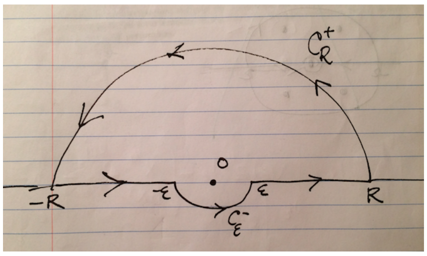
ARC 2016. Esercizi 9. Integrali col metodo dei residui, principio dell'argomento, teor. di Rouché.

1. n.5, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Sol.: Sia γ la curva della figura qui sotto



Per il Teorema dei residui applicato alla funzione $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$, abbiamo

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i Res(f(z), 0) = 2\pi i. \tag{1}$$

D'altra parte, l'integrale in (1) è anche uguale a

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} + \int_{C_\epsilon^-} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x} + \int_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

(a) $\int_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{z} dz \to 0, \quad R \to +\infty$;
Dim.: Segue dal Lemma 3 (Cartan, III 6.3, pag. 103).

(b) $\int_{C_\epsilon^-} \frac{e^{iz}}{z} dz \to \pi i, \quad \epsilon \to 0$.
Dim.: La funzione $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ ha un polo di ordine uno in $z = 0$ e la sua espansione in serie di Laurent centrata in $z = 0$ è della forma $f(z) = \frac{1}{z} + h(z)$, con $h(z) = i + \frac{i^2}{2} z + \dots$ olomorfa intorno a $z = 0$. Abbiamo

$$\int_{C_\epsilon^-} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{C_\epsilon^-} \frac{1}{z} dz + \int_{C_\epsilon^-} h(z) dz,$$

dove

$$\int_{C_\epsilon^-} \frac{1}{z} dz = \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{\epsilon e^{i\theta}} \epsilon i e^{i\theta} d\theta = i\pi$$

e

$$\left| \int_{C_\epsilon^-} h(z) dz \right| \le \pi\epsilon \sup_{C_\epsilon^-} |h(z)| \to 0, \quad \epsilon \to 0.$$

Ne segue che

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} + \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x} + \pi i$$

$$= 2i \int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin x}{x} dx + \pi i.$$

Facendo tendere $R \to +\infty$ e $\epsilon \to 0$, otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi/2.$$