COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete*. Consegnare SOLO QUESTI FOGLI.

1. (a) Determinare una funzione olomorfa $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ tale che $\mathrm{Re}(f(z)) = 2xy$, dove $z = x + iy$.
   (b) Quante ce ne sono? Giustificare bene la risposta.

Sol.: (a) $f(z) = -iz^2 = -i(x+iy)^2 = -i[(x^2-y^2)+i2xy] = 2xy - i(x^2-y^2)$ è una funzione che soddisfa le richieste.

(b) Se f e g sono due funzioni olomorfe con parti reali uguali, la loro differenza $h = f - g = u + iv$ è una funzione olomorfa con parte reale identicamente nulla. In particolare $u_x = u_y \equiv 0$ e per le condizioni di Cauchy-Riemann anche $v_y = v_x \equiv 0$. Poiché $\mathbb{C}$ è connesso, h è costante. Ne segue che una funzione olomorfa con parte reale assegnata è univocamente determinata a meno di una costante puramente immaginaria. Nel nostro caso, le funzioni olomorfe descritte in (a) sono tutte e sole le $f(z) = -iz^2 + c,\ c \in i\mathbb{R}$.

2. *Sia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $|f(z)| \le |z|^k$. Dimostrare che f è un polinomio di grado $\le k$.*

Sol.: Sia $f(z) = \sum_{n\ge 0} a_n z^n$ l'espansione di f in serie di potenze centrata in 0, e convergente su tutto $\mathbb{C}$. Facciamo vedere che $a_n = 0$, per ogni $n > k$. Dalla formula di Cauchy per le derivate di f in $z = 0$, abbiamo

$$|a_n| = \frac{1}{n!}|f^{(n)}(0)| \le \frac{1}{R^n} \sup_{|z|=R} |f(z)|, \quad \forall R > 0.$$

Poiché $|f(z)| \le |z|^k$, vale

$$|a_n| \le \frac{R^k}{R^n} = R^{k-n}.$$

Conclusione: se $n > k$ la tesi segue per $R \to +\infty$.

3. *Scrivere le serie di Laurent centrate in $z = 0$ della funzione $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ e indicare i rispettivi raggi di convergenza.*

Sol.: La funzione f ha due poli di ordine 1 in $z = 0$ e $z = 1$. Ci sono due serie di Laurent centrate in $z = 0$: una che converge per $0 < |z| < 1$ (il disco bucato centrato in zero che ha il polo $z = 1$ sul bordo) ed una che converge per $|z| > 1$. Scriviamo

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z}.$$

Per $|z| < 1$, abbiamo

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n\ge 0} z^n,$$

per cui la serie di Laurent di f per $0 < |z| < 1$ è data da

$$f(z) = -\frac{1}{z} - (1 + z + z^2 + z^3 + \dots).$$

Per $|z| > 1$, abbiamo

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{(1-1/z)} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z}^n,$$

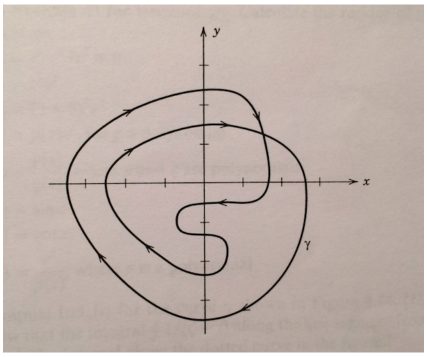
per cui la serie di Laurent di f per $|z| > 1$ è data da

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z}(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots.$$

4. *Calcolare l'integrale*

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z(z+2i)^2} dz$$

dove γ *è la curva della figura qui sotto.*



Sol.: La funzione $f(z) = \frac{\sin z}{z(z+2i)^2}$ ha una singolarità rimovibile in $z = 0$ e un polo di ordine due in $z = -2i$. Il residuo di f in $z = -2i$ è dato da

$$Res(f, -2i) = h'(-2i), \qquad \text{dove } h(z) = \tfrac{\sin z}{z} \text{ e } h'(z) = \tfrac{z\cos z - \sin z}{z^2}.$$

Ne segue che

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z(z+2i)^2} dz = 2\pi i Ind(\gamma, -2i) Res(\frac{\sin z}{z(z+2i)^2}, -2i) = 2\pi i \cdot (-2) \cdot (\frac{(-2i)\cos(-2i) - \sin(-2i)}{(-2i)^2})$$

$$= \frac{\pi}{2}(e^2 + 3e^{-2}).$$