

COGNOME NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete*. Consegnare SOLO QUESTI FOGLI.

4. Sia $\gamma = \{2e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$. Dimostrare che la funzione

$$g(z) = \int_{\gamma} \frac{\zeta^4 + \sin \zeta}{(\zeta - z)^3} d\zeta$$

è olomorfa nel dominio $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$.

Sol.: La funzione $f(\zeta) = \zeta^4 + \sin \zeta$ è ben definita e olomorfa su tutto $\mathbb{C}$, e lo stesso vale per tutte le sue derivate. Nel dominio $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$, la funzione g coincide, a meno di una costante moltiplicativa, con la derivata seconda di f . Quindi definisce una funzione olomorfa in D .

5. Sia data la funzione definita nel modo seguente $f(z) = \begin{cases} z^3 e^{\frac{1}{z}}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0. \end{cases}$

(a) Determinare la serie di Laurent di f in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;

(b) Calcolare $\text{Res}(f, 0)$;

(c) Classificare il tipo di singolarità di f in 0: rimovibile, essenziale, o polo di ordine m .

Sol.: La funzione f è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. La serie di Laurent di f in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ è data da

$$z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = z^3 + z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{3n!} \frac{1}{z^{n-3}} + \dots$$

(b) Il residuo di f in 0 è il coefficiente di $\frac{1}{z}$ ed è uguale a $\frac{1}{4!}$.

(c) 0 è una singolarità essenziale: la serie di Laurent contiene infinite potenze negative di z . Per il teorema di Casorati-Weierstrass, l'immagine tramite f di ogni disco $\Delta_R \setminus \{0\}$ è densa in $\mathbb{C}$. In particolare f non ha limite in zero, né finito né infinito.

6. Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx.$$

Sol.: La funzione integranda è pari, quindi

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \int_{-\infty}^\infty \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} dx.$$

Sia $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} \mid z = R e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}$. Per ogni $R > 0$ sufficientemente grande, dal teorema dei residui, si ha che

$$\int_{[-R, R] \cup \gamma_R} \frac{z e^{iz}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{z e^{iz}}{z^2 + 1}, i\right) = 2\pi i \frac{1}{2e} = \frac{\pi i}{e}.$$

Se dimostriamo che $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+1} dz = 0$, abbiamo che l'integrale cercato è

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \frac{\pi i}{e} = \frac{\pi}{2e}.$$

• $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+1} dz = 0$

Dim.: Sia $z = Re^{i\theta}$, per $\theta \in [0, \pi]$. Allora $dz = Rie^{i\theta} d\theta$.

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+1} dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{iR^2 e^{i2\theta} e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{R^2 e^{i2\theta} + 1} d\theta \right| \leq \pi \frac{e^{-R}}{|R^2 - 1|}$$

e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \pi \frac{e^{-R}}{R^2 - 1} = 0.$$