ARC 2016. Esercizi 9. Integrali col metodo dei residui, principio dell'argomento, teor. di Rouché.

1. Calcolare i seguenti integrali col metodo dei residui
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{1/4}}{1+x^3}dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{2+x^4}dx.$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^4}dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$$

2. Calcolare
$$\int_\gamma \sin\frac{1}{z}\,dz, \qquad \gamma = \{z = e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

3. Sia $f(z) = z^5 - 3iz + 62$ e sia C una circonferenza (percorsa una volta in senso antiorario) che racchiude tutti gli zeri di f. Calcolare
$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

4. Sia $f(z) = \frac{(z^2+1)^2}{(z^2+2z+2)^3}$ e sia $C = \{|z| = 4\}$ (percorsa una volta in senso antiorario). Calcolare
$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

5. Siano f, g funzioni olomorfe sul disco unità e continue sulla circonferenza unitaria γ (percorsa una volta in senso antiorario). Supponiamo che f si annulli nei punti $P_1, \ldots, P_k$ dentro il disco e che sia diversa da zero su γ. Calcolare
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

6. Sia $f(z) = z^4 - 2z^3 + z^2 - 12z + 20$. Calcolare
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z\frac{f'(z)}{f(z)}dz, \qquad \gamma = \{z = 5e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

7. Sia $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ un polinomio di grado n a coefficienti complessi. Far vedere che esiste $z \in \mathbf{C}$ con $|z| = 1$, tale che $|P(z)| \geq 1$.

8. Sia f una funzione non costante, olomorfa in un intorno del disco unità Δ. Se $|f(z)| < 1$ per $|z| = 1$, allora esiste in $z \in \Delta$ tale che $f(z) = z$.

9. Far vedere che tutte le radici di $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ si trovano nell'anello $A = \{z \in \mathbf{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

10. Siano f e g meromorfe su un aperto connesso D e sia A un sottoinsieme di $D \setminus \{Poli(f) \cup Poli(g)\}$ con un punto di accumulazione. Dimostrare che $f = g$ su A implica $f = g$.

11. (Teorema di Hurwitz) Sia $f_n \colon D \longrightarrow D$ una successione di funzioni olomorfe mai nulle su un dominio $D \subset \mathbf{C}$. Supponiamio che $\{f_n\}$ converga uniformemente sui compatti ad una funzione olomorfa non identicamente nulla $f \colon D \longrightarrow \mathbf{C}$. Far vedere che f non si annulla mai su D.