ARC 2016. Esercizi 8. Automorfismi di $\mathbf{C}$; Teorema dei residui: calcolo di integrali.

---

1. Sia $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ una funzione olomorfa non costante. Dimostrare che l'immagine $f(\mathbf{C})$ è densa in $\mathbf{C}$.

2. Far vedere che la funzione definita da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$ è olomorfa su $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Calcolare il suo integrale su $\gamma = \{z = e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

3. Calcolare gli integrali
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^3} dz, \qquad \int_\gamma \frac{e^{1/z}}{z^3} dz,$$
su $\gamma = \{e^{i\theta},\ \ \theta \in [0, 6\pi]\}$ e su $\gamma = \{e^{i\theta},\ \ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

4. Calcolare i seguenti integrali:
$$\int_\gamma \frac{z}{(z-1)(z-2i)} dz \qquad \gamma = \{5e^{i\theta},\ \ \theta \in [0, 2\pi]\},$$
$$\int_\gamma \frac{e^z}{\sin z} dz \qquad \gamma = \{e^{i\theta},\ \ \theta \in [0, 4\pi]\},$$
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z+2)(z+1)} dz \qquad \gamma = \text{triangolo di vertici } -3, 1 \pm i, \text{ percorso in senso orario.}$$

5. Calcolare i seguenti integrali col metodo dei residui:
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5 - 3\cos x)^2} dx, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{2 - \cos\theta} d\theta.$$

6. Calcolare i seguenti integrali reali col metodo dei residui:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x + x^2)^2}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 6x^2 + 13} dx,$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{1 + x^{10}} dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^3} dx.$$

7. Calcolare i seguenti integrali reali col metodo dei residui:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x \ dx}{x^2 + 4}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1 + x^2} dx.$$

8. Mostrare che
$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}.$$
(suggerimento: usare il fatto che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$).