ARC 2016. Esercizi 4. Integrali complessi. Formula di Cauchy

1. Siano $|a| < 1 < |b|$. Per $n, m \in \mathbf{Z}$, calcolare
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(z-b)^m}{(z-a)^n}dz,$$
dove $\gamma = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

2. Calcolare
$$\int_\gamma \left(\frac{z-2}{2z-1}\right)^3 dz,$$
dove $\gamma = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

3. Calcolare
$$\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-\pi/2)^{10}}dz,$$
dove $\gamma = \{2e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

4. Calcolare
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz, \qquad \int_\gamma \frac{e^z}{(z-1/2)^2}dz,$$
dove $\gamma = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

5. Calcolare
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(z-1)(z-2i)}dz,$$
dove $\gamma = \{4e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

6. Calcolare
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^2+z}{(z+3)(z-2i)}dz,$$
dove $\gamma = \{1+5e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

7. Siano f una funzione olomorfa e C una circonferenza come nell'enunciato del teorema di Cauchy (Sarason VII.5, p.75). Quanto vale
$$\int_C \frac{f(\xi}{\xi - z}d\xi,$$
se z sta all'esterno della circonferenza C?

8. Sia $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{C}$ una curva C^1. Definiamo
$$f(z) = \int_\gamma \frac{1}{\xi - z}d\xi.$$
Far vedere che f è olomorfa su $\mathbf{C} \setminus \bar{\gamma}$, dove $\bar{\gamma} = \{\gamma(t),\ t \in [0,1]\}$.