

*Alcuni di questi esercizi sono stati fatti in classe: rifarli a libro chiuso.*

1. Determinare dominio di convergenza e somma della serie  $1 + z + z^2 + z^4 + z^6 + z^8 + \dots$ .
2. Alcune variazioni su tema dell'esercizio 1: determinare dominio di convergenza e somma delle serie

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(z+i)^n}{(1+i)^{n+1}}, \quad \sum_{n \geq 0} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^n, \quad \sum_{n \geq 0} \left( \frac{z}{1+z} \right)^n.$$

3. Verificare che la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$  converge su tutti i punti del bordo del disco unit   $|z| < 1$ , eccetto  $z = 1$ .
4. Determinare il raggio di convergenza delle serie

$$\sum_{n \geq 0} n! z^n \quad \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad \sum_{n \geq 0} n! z^{n!} \quad \sum_{n \geq 0} z^{n!} \quad \sum_{n \geq 0} n^n z^{n^2} \quad \sum_{n \geq 0} z^{n^n}.$$

5. Discutere la convergenza delle serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n(n+1)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$$

e delle rispettive serie derivate sul bordo del dominio di convergenza.

6. Sia  $\sum_n a_n z^n$  una serie con raggio di convergenza  $R$ , calcolare il raggio di convergenza delle serie

$$\sum_n a_n^2 z^n \quad \sum_n a_n z^{2n} \quad \sum_n a_n^2 z^{2n}.$$

7. Sia  $\sum_n a_n z^n$  una serie con raggio di convergenza  $R$ , e sia  $\sum_n b_n z^n$  una serie per cui vale

$$|b_n| < n^2 |a_n|, \quad \forall n.$$

Far vedere che anche  $\sum_n b_n z^n$  converge assolutamente per ogni  $z$ , con  $|z| < R$ .