1. Determinare tutti i punti in cui le seguenti funzioni sono olomorfe:

$$f(x,y) = xy^2, \quad f(z) = |z|^2(|z|^2 - 1), \quad f(z) = \sin(|z|^2), \quad f(z) = z(z+\bar{z})^2.$$

2. Sia $D \subset \mathbf{C}$ un aperto. Determinare le funzioni olomorfe $f = u + iv \colon D \to \mathbf{C}$ per cui anche $F = u^2 + iv^2$ è olomorfa su D (sugg.: dimostrare e usare il fatto che se $f = u + iv$ è olomorfa, allora $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$).

3. Sia $f \colon D \to \mathbf{C}$ una funzione su un aperto $D \subset \mathbf{C}$. Verificare che $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}}$.

4. Sia $f \colon D \to \mathbf{C}$ una funzione olomorfa su un aperto connesso $D \subset \mathbf{C}$. Sia $\gamma \colon [a,b] \to D$ una curva liscia. Dimostrare che $f(\gamma(t))' = f'(\gamma(t))\gamma(t)'$, dove $f'(\gamma(t))$ indica la derivata complessa $\partial f/\partial z$, valutata in $\gamma(t)$.

5. Sia $f \colon D \to \mathbf{C}$ una funzione olomorfa su un aperto connesso $D \subset \mathbf{C}$:
   (a) se $f'(z) \equiv 0$, allora f è costante.
   (b) se $|f(z)|^2$ è costante, allora f è costante.
   (c) se $\arg(f(z))$ è costante, allora f è costante.

6. Sia f una funzione olomorfa su un aperto $D \subset \mathbf{C}$. Verificare che la funzione $g(z) := \overline{f(\bar{z})}$ è olomorfa su $D^* = \{\bar{z} \ : z \in D\}$.

7. Calcolare i valori delle seguenti funzioni:
   (a) $e^{i\pi/4}, \quad e^{i3\pi/4}, \quad e^{1+i2\pi/3}$.
   (c) $\log 3i, \quad \log(-4), \quad \log(e+i)$.
   (e) $2^i, \quad i^i, \quad (1-i)^{1+i}, \quad (-i)^{-i}$.

8. Sia data la funzione $f(z) = z^2, \ z \in \mathbf{C}$.
   (a) Determinare l'immagine tramite f del primo quadrante.
   (b) Determinare il raggio del più grosso disco centrato in 1 su cui f è iniettiva.
   (c) Rispondere alle domande (a) e (b) quando $f(z) = z^4$.

9. Determinare la controimmagine del primo quadrante tramite la funzione $f(z) = \sqrt{z}$.

10. Determinare la controimmagine del primo quadrante tramite la funzione *radice cubica.*

11. Determinare l'immagine tramite la mappa esponenziale $z \mapsto e^z$ dei seguenti sottoinsiemi del piano:
    (a) la retta $x = 2$;
    (b) la retta $y = x$;
    (c) il quadrato di vertici $0, \ i, \ 1, \ 1+i$.
    (d) la striscia $x - \frac{\pi}{2} < y < x + \frac{\pi}{2}$.

12. Descrivere le curve $|f|$=costante e $\arg(f)$=costante se $f(z) = e^{z^2}$.

13. Siano $\cos z := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ e $\sin z := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.
   (a) Verificare che $\cos z$ e $\sin z$ sono olomorfe su tutto $\mathbf{C}$.
   (b) Verificare che $(\sin z)' = \cos z$ e $(\cos z)' = -\sin z$.
   (c) Verificare che $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.
   (d) Sia $\tan z := \sin z / \cos z$, dove $\cos z \neq 0$. Calcolare la sua derivata.

14. Siano $\cosh z := \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$ e $\sinh z := \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$.
   (a) Verificare che $\cosh z$ e $\sinh z$ sono olomorfe su tutto $\mathbf{C}$.
   (b) Calcolare $(\sinh z)'$ e $(\cosh z)'$.
   (c) Verificare che $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.
   (d) Sia $\tanh z := \sinh z / \cosh z$, dove $\cosh z \neq 0$. Calcolare la sua derivata.

15. Calcolare i valori delle seguenti funzioni:
   (a) $\sin(-1+i)$, $\quad \cos(\pi/2 - i)$.
   (b) $4\sinh(i\pi/3)$, $\quad \cosh((2k+1)i\pi/2)$.

16. Dimostrare le seguenti identità:
   (a) $|e^{iz}| = e^{-y}$, per ogni $z = x + iy \in \mathbf{C}$.
   (b) $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$, per ogni $z \in \mathbf{C}$.
   (c) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, per ogni $z \in \mathbf{C}$.

17. La funzioni $|\sin z|$ e $|\cos z|$ sono limitate su $\mathbf{C}$?

18. Sapendo che $\cos z = 2$, calcolare $\cos 2z$ e $\cos 3z$.

19. Risolvere le seguenti equazioni in $\mathbf{C}$:

$$e^{3z} = 1, \quad e^{4z} = i, \quad \sin z = 2, \quad \cos z = i.$$