1. Siano $z = 2 + 2i$ e $w = 2i$.
   (i) Calcolare $(z - w)^2$, $2z^2 + 1/w$, $z^{-1} + \overline{w}$, $|z + 3w|^2$. Dare la risposta nella forma $a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$.
   (ii) Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di zw, z^{-1} e $\overline{w}^2$.
   (iii) Calcolare $\mathrm{Arg}(z)$, $\mathrm{Arg}(zw)$, $\mathrm{Arg}(z/\overline{z})$ ed $\mathrm{Arg}(z^2)$.

2. Sia $a = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Calcolare $|a|$, $\mathrm{Arg}(a)$, a^2, a^3, a^{100}.

3. Risolvere le seguenti equazioni in $\mathbf{C}$:
   (i) $4z^3 + iz = 0$,
   (ii) $z^6 - 1 = 0$,
   (iii) $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

4. Disegnare i seguenti insiemi di numeri complessi
   (i) $z = -\overline{z}$,
   (ii) $\mathrm{Arg}(z) = 0$,
   (iii) $|z| = 2$,
   (iv) $|z| = \overline{z}$,
   (v) $1 < |z| < 3$,
   (vi) $1 < |z - 2i| < 2$
   (vii) $Re((1 - i)\overline{z}) \geq -1$.

5. Dimostrare che per ogni $\varphi \in \mathbf{R}$:

$$\cos(5\varphi) = \cos^5(\varphi) - 10\cos^3(\varphi)\mathrm{sen}^2(\varphi) + 5\cos(\varphi)\mathrm{sen}^4(\varphi),$$
$$\mathrm{sen}(5\varphi) = 5\cos^4(\varphi)\mathrm{sen}(\varphi) - 10\cos^2(\varphi)\mathrm{sen}^3(\varphi) + \mathrm{sen}^5(\varphi).$$

6. *(Disuguaglianza triangolare)* Dimostrare: per ogni $z, w \in \mathbf{C}$ si ha
   (i) $|z + w| \leq |z| + |w|$,
   (ii) $|z - w| \geq |z| - |w|$,
   (iii) $|z - w| \geq |w| - |z|$.