ARC 2015, parte 2 (Geatti) Esonero 2 Roma, 18 gennaio 2016, ore 10 – 12:30.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete.* Consegnare SOLO I FOGLI STAMPATI. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. *Sia* $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *una funzione olomorfa la cui immagine* $f(\mathbf{C})$ *è contenuta nella retta* $\mathrm{Re}(z) = 2$. *Dimostrare che* f *è costante.*

Sol.: La parte reale e la parte immaginaria di una funzione olomorfa $f = u + iv\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ sono funzioni differenziabili e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}.$$

Per ipotesi, nel nostro caso vale $u \equiv 2$ e dunque $u_x = u_y \equiv 0$. Da CR segue che anche $v_x = v_y \equiv 0$. Poiché $\mathbf{C}$ è connesso, f è costante.

2. *Calcolare tutti i valori di* $\log(1+i)$. *Calcolare* $\log(1+i)$ *e* $(1+i)^i$, *quando la determinazione dell'argomento è fissata in* $[2\pi, 4\pi]$.

Sol.: Abbiamo

$$\log(1+i) = \{\log|1+i| + i\arg(1+i)\} = \{\log\sqrt{2} + i\pi/4 + i2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}\}.$$

Se fissiamo la determinazione dell'argomento in $[2\pi, 4\pi]$, allora

$$\log(1+i) = \log\sqrt{2} + i(\pi/4 + 2\pi) = \log\sqrt{2} + i9\pi/4$$

$$(1+i)^i = e^{i\log(1+i)} = e^{i(\log\sqrt{2} + i9\pi/4)} = e^{-9\pi/4}(\cos\log\sqrt{2} + i\sin\log\sqrt{2}).$$

3. *Sia* $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$. *Determinare le serie di Laurent di* f *centrate in* $z = 0$.

Sol.: La funzione ha un polo semplice in $z = 0$ e un polo semplice in $z = 1$. Ha due serie di Laurent in z, centrate in $z = 0$: una convergente sul disco bucato $\Delta^* = \{z \in \mathbf{C},\ 0 < |z| < 1\}$ e una sull'anello $A = \{z \in \mathbf{C},\ |z| > 1\}$. Scriviamo $f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{(z-1)}$. Per determinare la serie convergente su Δ^* espandiamo la funzione $\frac{1}{(z-1)}$, che è olomorfa intorno a 0, in serie di potenze di z:

$$-\frac{1}{(1-z)} = -\sum_{n\geq 0} z^n, \qquad |z| < 1,$$

da cui

$$-\frac{1}{z} - \sum_{n\geq 0} z^n.$$

Per determinare la serie convergente su A espandiamo $\frac{1}{(z-1)}$ in serie di potenze di $1/z$

$$\frac{1}{(z-1)} = \frac{1}{z}\frac{1}{(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^n} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^{n+1}}, \qquad |z| > 1,$$

da cui

$$-\frac{1}{z}+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^{n+1}}=\sum_{n\geq 2}\frac{1}{z^n}.$$

4. *Calcolare*

$$I=\int_\gamma \frac{\sin z}{(z^2-1)z}dz,$$

dove γ è la curva disegnata qui sotto.

Sol.: Il denominatore della funzione $z(z^2-1)=z(z-1)(z+1)$ si annulla in $z=0,1,-1$ (zeri semplici). Poiché $\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$ e $\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{(z^2-1)z}=-1$, si ha che $z=0$ è una singolarità rimovibile per f. I punti $z=1$ e $z=-1$ sono poli semplici. Poiché la curva γ ha indice nullo rispetto a $z=-1$ (che sta fuori dalla curva) e indice uguale a -1 rispetto a $z=1$ (gira una volta in senso orario attorno a $z=1$), l'integrale cercato vale

$$I=-2\pi i Res(f,1)=-2\pi i\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=-\pi i\sin 1.$$

5. *Calcolare*

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin t}dt.$$

Sol.: Sulla circonferenza unitaria $z=e^{it}=\cos t+i\sin t$ e $\bar{z}=\frac{1}{z}$. Col cambiamento di variabile $\sin t=(z-\frac{1}{z})/2i$ e $dt=dz/iz$, l'integrale I si riconduce all'integrale complesso

$$\int_\gamma \frac{2}{z^2+4iz-1}dz,$$

dove $\gamma=\{e^{it},\ t\in[0,2\pi]\}$. Solo il polo $z=i(-2+\sqrt{3})$ si trova all'interno della circonferenza, ed ha residuo uguale a $2i\sqrt{3}$. Ne segue che l'integrale cercato vale $I=2\pi\sqrt{3}/3$.