COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete*. Consegnare SOLO QUESTI FOGLI.

4. *Sia* $\gamma = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$. *Siano* $|a| < 1 < |b|$. *Per* $n, m \in \mathbf{Z}$, *calcolare*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(z-b)^m}{(z-a)^n}dz.$$

Sol.: (Questo è l'esercizio 6 del Foglio 3).

• Sia $n \leq 0$.
Per ogni $m \in \mathbf{Z}$, la funzione $g(z) = \frac{(z-b)^m}{(z-a)^n}$ è olomorfa in un intorno aperto del disco chiuso $\overline{\Delta(0,1)}$. Ne segue che l'integrale cercato vale 0.

• Sia $n > 0$.
Per ogni $m \in \mathbf{Z}$, la funzione $f(z) = (z-b)^m$ è olomorfa in un intorno aperto del disco chiuso $\overline{\Delta(0,1)}$. Dalla formula integrale di Cauchy per f e per le sue derivate ricaviamo che l'integrale cercato è dato da

$$\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a).$$

Allo stesso risultato si arriva anche applicando il teorema dei residui:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(z-b)^m}{(z-a)^n}dz = I(\gamma, a)Res(\frac{(z-b)^m}{(z-a)^n}, a) = \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a), \qquad f(z) = (z-b)^m.$$

Se $m \geq 0$ e $n - 1 > m$, allora $f^{(n-1)}(a) = 0$;
se $m \geq 0$ e $0 \leq n-1 \leq m$, allora

$$f^{(n-1)}(a) = m(m-1)\ldots(m-(n-1)+1)(a-b)^{m-(n-1)}$$

se $m < 0$, allora

$$f^{(n-1)}(a) = (-1)^{(n-1)}m(m+1)\ldots(m+(n-1)-1)\frac{1}{(a-b)^{m+(n-1)}}$$

In conclusione:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(z-b)^m}{(z-a)^n}dz = \begin{cases} 0 \quad n \leq 0,\ \forall m \in \mathbf{Z} \\ 0 \quad n-1 > m \geq 0 \\ \frac{1}{(n-1)!}m(m-1)\ldots(m-(n-1)+1)(a-b)^{m-(n-1)}, \quad m \geq 0,\ 0 \leq n-1 \leq m \\ \frac{1}{(n-1)!}(-1)^{(n-1)}m(m+1)\ldots(m+(n-1)-1)\frac{1}{(a-b)^{m+(n-1)}}, \quad m < 0,\ n > 0. \end{cases}$$

5. *Determinare l'anello di convergenza della serie di Laurent* $\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{2^{n^2}}z^n$.
Sia f *la funzione olomorfa da essa definita sull'anello di convergenza. Calcolare*

$$\int_\gamma f(z)dz,$$

dove $\gamma = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Sol.: La serie $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{n^2}} z^n$ converge per $|z| \leq \infty$: infatti $a_n = \frac{1}{2^{n^2}}$ e

$$R = (1/\limsup_n \frac{1}{2^{n^2}})^{\frac{1}{n}} = 1/\limsup_n \frac{1}{2^n} = +\infty.$$

Similmente la serie $\sum_{n>0} \frac{1}{2^{n^2}} \frac{1}{z^n}$ converge per $\frac{1}{|z|} \leq \infty$, ossia per $|z| > 0$. In conclusione, la serie di Laurent converge su $\mathbf{C}^*$ e lì definisce una funzione olomorfa f con una singolarità isolata in $z = 0$. Il residuo di f in $z = 0$ è uguale a $\frac{1}{2}$. Dal teorema dei residui segue che l'integrale cercato vale $2\pi i I(\gamma, 0) Res(f, 0) = \pi i$.

6. *Dimostrare il teorema di Liouville nelle ipotesi che $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ sia una funzione olomorfa e inoltre esista $M > 0$ tale che $|f(z)| \leq M$, su tutti gli aperti $A_R = \{z \in \mathbf{C},\ |z| > R\}$, con $R > R_0$ ed $R_0 > 0$ fissato.*

Sol.: Sia $\gamma_R = \{Re^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$ la circonferenza di raggio R. Poiché f è olomorfa su tutto $\mathbf{C}$, valgono le stime di Cauchy per f e le sue derivate

$$|f^{(n)}(z)| = |\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \frac{1}{R^{n+1}} \sup_{\gamma_R} |f(\xi)| = \frac{1}{R^n} \sup_{\gamma_R} |f(\xi)|,$$

per ogni z all'interno della circonferenza γ_R. Ad esempio, per $n = 1$ troviamo $|f'(z)| \leq \frac{M}{R}$, per ogni $R > R_0$ ed ogni z all'interno della circonferenza γ_R. Facendo tendere R a $+\infty$, troviamo $f(z) \equiv 0$ ed f costante.