1. Determinare l'anello di convergenza delle serie di Laurent

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} a^{n^2} z^n, \quad |a|<1, \qquad \sum_{n\in\mathbf{Z}} a^n z^n, \quad a \neq 0, \qquad \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{z^n}{|n|!}, \qquad \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{(z-3)^{2n}}{(n^2+1)^n}.$$

2. Sia $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}, \quad 0 < |a| < |b|$.
   (i) Determinare le 3 serie di Laurent di f centrate in zero: su $\Delta(0,|a|)$, su $A_{|a|,|b|}(0)$ e su $A_{|b|,+\infty}(0)$.
   (ii) Determinare le 2 serie di Laurent di f centrate in $z=a$: su $A_{0,|a-b|}(a)$ e su $A_{|a-b|,+\infty}(a)$.

3. Sia $f(z) = \frac{z^2}{z^2+1}$.
   (i) Determinare la serie di Laurent di f intorno a $z = i$.
   (ii) Determinare il tipo di singolarità di f all'infinito.

4. Sia $f(z) = \frac{e^z}{(z-i)^3(z+2)^2}$.
   (i) Far vedere che $z = i$ è un polo di f di ordine 3.
   (ii) Calcolare i coefficienti negativi della serie di Laurent di f centrata in $z = i$.
   (iii) Far vedere che $z = -2$ è un polo di f di ordine 2.
   (iv) Calcolare i coefficienti negativi della serie di Laurent di f centrata in $z = -2$.

5. Determinare il tipo di singolarità delle seguenti funzioni in $z = 0$:

$$z e^{1/z} e^{-1/z^2}, \qquad \frac{\sin z}{z^k}, \; k \in \mathbf{N}, \qquad \frac{1}{z^3} - \cos z.$$

6. Determinare le singolarità delle seguenti funzioni:

$$\tan z = \sin z / \cos z, \qquad \frac{1}{\sin(1-1/z)}, \qquad \frac{1}{z^3}\sum_{n=2}^{\infty} 2^n z^n.$$

7. Sia f una funzione olomorfa sull'insieme $\Delta(0,r) \setminus \{0\}, \quad 0 < r \leq +\infty$. Supponiamo che $z = 0$ sia un polo di ordine k. Allora lo sviluppo di Laurent di f in $z = 0$ è dato da

$$f(z) = \sum_{n\geq -k} a_n z^n, \qquad a_n = \frac{1}{(n+k)!} g^{(n+k)}(0), \quad \text{dove } g(z) = z^k f(z).$$

8. Sia $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ una funzione olomorfa intera (definita su tutto $\mathbf{C}$). Allora f ha una singolarità all'infinito. Di che tipo? (distinguere i casi).

9. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa.
   (a) Verificare che, se f che ha uno zero di ordine k in $z = 0$, allora $1/f$ ha un polo di ordine k in $z = 0$.

(a) Se f che ha una singolarità in $z = 0$ (rimovibile, essenziale, polo), determinare i tipi di singolarià di $1/f$ in $z = 0$, nei vari casi.

10. Sia $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ una funzione razionale, con p, q polinomi complessi, senza zeri comuni.
   (i) Sia α uno zero di q di ordine k. Allora α è un polo di f di ordine k.
   (ii) Sia $s = \deg p - \deg q$. Allora ∞ è un polo di f di ordine s, se $s > 0$, ed è uno zero di f di ordine $|s|$, se $s < 0$. Infine, se $s = 0$, esiste $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = l \neq 0$.

11. Calcolare i seguenti residui:

$$Res_f(2i), \quad f(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z+3)}, \quad Res_f(i+1), \quad f(z) = \frac{e^z}{(z-i-1)^3}.$$

$$Res_f(\pi/2), \quad f(z) = \tan z, \quad Res_f(0), \quad f(z) = \frac{e^z}{\sin z}, \quad Res_f(0), \quad f(z) = \frac{e^z}{1-e^z}$$

$$Res_f(0), \quad f(z) = \frac{e^z}{z^3}, \quad Res_f(0), \quad f(z) = \frac{e^{1/z}}{z^3}.$$

12. Sia $f\colon D \to \mathbf{C}$ una funzione olomorfa, con D aperto in $\mathbf{C}$, e sia $z_0 \in D$. Supponiamo che f abbia uno zero di ordine m in z_0. Dimostrare che $Res_{z_0}(f'/f) = m$.