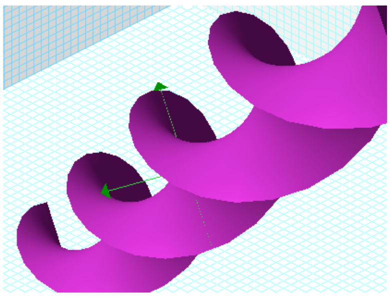
1. Siano date le superfici dello spazio
$$\mathbf{T}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u,v \in \mathbf{R}, \qquad \mathbf{S}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{pmatrix}, \quad u \in [0,2\pi],\ v \in \mathbf{R}.$$
(cosa sono?? disegnarle)
   (a) Verficare che i coefficienti della prima forma fondamentale sia di **T** che di **S** sono dati da
$$E(u,v) = G(u,v) \equiv 1, \quad F(u,v) \equiv 0.$$
   (b) Calcolare i coefficienti della seconda forma fondamentale di **T** e di **S**.
   (c) Verificare che **S** è una superficie rigata sviluppabile.
2. Sia $S(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}$, con $u \in [-\pi/2, \pi/2]$, $v \in [0, 2\pi]$.
   (a) Calcolare i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale di **S**.
   (b) Verificare che tutti i punti di **S** sono ellittici e umbilicali.
   (b) Verificare che **S** ha curvatura di Gauss costante $K \equiv 1$.
3. Sia data la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ \cos t + \log \tan \frac{t}{2} \end{pmatrix}$, con $t \in (0,\pi)$, e sia **S** la superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare γ intorno all'asse x_3.
   (a) Verificare che γ è regolare per ogni $t \neq \pi/2$.
   (b) Sia $P(t)$ il punto di intersezione fra la retta tangente a γ in $\gamma(t)$ e l'asse x_3. Verificare che $\|P(t) - \gamma(t)\| \equiv 1$.
   (c) Verificare che **S** ha curvatura di Gauss costante $K \equiv -1$.
4. Sia data la superficie $\mathbf{S}(u,v) = \begin{pmatrix} v \cos u \\ v \sin u \\ u \end{pmatrix}$ (*elicoide*).
   (a) Verificare che **S** è una superficie rigata.
   (b) Guardando la figura qui sotto, cosa si può dire intuitivamente della curvatura gaussiana di S? È possibile che **S** sia una superficie rigata sviluppabile?
   (c) Determinare (con i calcoli) se **S** è una superficie rigata sviluppabile.
   (d) Calcolare la curvatura gaussiana di **S**.



5. Date la superfici $\mathbf{S}(u,v) = \begin{pmatrix} \sinh v \cos u \\ \sinh v \sin u \\ u \end{pmatrix}$ (lo stesso *elicoide*, parametrizzato in modo diverso) e $\mathbf{T}(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v \cos u \\ \cosh v \sin u \\ v \end{pmatrix}$ (*catenoide*). Verificare che hanno la stessa prima forma fondamentale e la stessa curvatura di Gauss. Guardare il filmetto che porta l'elicoide sul catenoide, senza alterare angoli e lunghezze *sulle superfici*.