1. Per ognuna delle seguenti forme quadratiche determinare la forma canonica affine, e determinare un cambiamento di coordinate $X = AY$ che la riduca a tale forma:
   (i) $q(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2$;
   (ii) $q(x_1, x_2, x_3) = 8x_1^2 + 6x_1x_2$;
   (iii) $q(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

2. Determinare quali fra seguenti matrici simmetriche sono congruenti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Determinare la retta tangente alla curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 2t^2 \\ t+1 \end{pmatrix}$ nel punto $\gamma(1)$. Determinare il piano osculatore a γ nel punto $\gamma(1)$.

4. Determinare la lunghezza del tratto di circonferenza $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos\frac{t}{2} \\ 2\sin\frac{t}{2} \end{pmatrix}$, parametrizzato da $t \in [0, 3\pi/2]$. Verificare che la circonferenza è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

5. Determinare la lunghezza del tratto di elica cilindrica $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ t \end{pmatrix}$, parametrizzato da $t \in [-\pi, \pi]$.

6. Determinare la lunghezza del tratto della curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3/3 + t \\ t^3/3 \end{pmatrix}$, parametrizzato da $t \in [-1, 2]$. Determinare se γ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

7. Sia data la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 4t+2 \\ t-5 \\ t^2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$.
   (a) Determinare il piano osculatore a γ nel punto $\gamma(0)$.
   (b) Verificare che la curva è contenuta in tale piano, ossia che $\gamma(t)$ soddisfa l'equazione di tale piano per ogni $t \in \mathbf{R}$.
   (c) Verificare che la torsione di γ è identicamente nulla.

8. Sia data la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1-t \\ t^3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$.
   (a) Determinare il piano osculatore a γ nel punto $\gamma(0)$ e nel punto $\gamma(1)$.
   (b) Verificare che la curva non è contenuta in un piano (ad esempio che $\gamma(t)$ non soddisfa l'equazione del piano osculatore a γ nel punto $\gamma(0)$).
   (c) Verificare che la torsione di γ non è identicamente nulla.

9. Sia data l'ellisse $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$.
   (a) Determinare i punti di γ dove la curvatura è massima e minima.
   (b) In tali punti determinare centro e raggio del cerchio osculatore.
   (c) Farne un disegno.

10. Sia data la parabola $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 3t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$.
    (a) Determinare i punti di γ dove la curvatura è massima.
    (b) In tali punti determinare centro e raggio del cerchio osculatore.
    (c) Farne un disegno.

11. Sia data la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$. Determinare se si tratta di una curva piana (cioè se è contenuta in un piano di $\mathbf{R}^3$).

12. Sia data la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ \log t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t > 0$. Calcolare curvatura e torsione di γ.