1. Determinare e disegnare l'immagine dell'insieme $A = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid \| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \| = 2\}$ tramite la traslazione $T_{\mathbf{p}}$ di passo $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. Determinare e disegnare l'immagine dell'insieme $A = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid \| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \| = 1\}$ tramite la traslazione $T_{\mathbf{p}}$ di passo $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ e sia $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la proiezione ortogonale su $\mathbf{v}$, ossia $F(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$.
   (a) Verificare che F non è un'isometria di $\mathbf{R}^2$. Spiegare bene la risposta.
   (b) Determinare i punti fissi di F, ossia l'insieme $Fix(F) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \mid F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$.

4. Determinare se l'applicazione $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, data da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, è un'isometria di $\mathbf{R}^2$.

5. Determinare per quali $a, b \in \mathbf{R}$ l'applicazione $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, data da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, è un'isometria di $\mathbf{R}^2$.

6. Sia $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione data da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Verificare che F è un'isometria di $\mathbf{R}^2$.
   (b) Verificare che l'insieme dei punti fissi $Fix(F) = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\}$ contiene un solo elemento P.
   (c) Verificare che F è una rotazione intorno a P.
   (d) Verificare che per ogni $\theta \neq 0$ l'isometria

   $$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

   ha un unico punto fisso P. Precisamente, F è la rotazione di un angolo θ intorno a P (quest'ultima affermazione richiede un po' di calcoli).

7. Sia $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione data da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Verificare che F è un'isometria di $\mathbf{R}^2$.
   (b) Verificare che i punti fissi di F formano una retta r.
   (c) Verificare che F è la riflessione rispetto ad r.

8. Sia $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione data da $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Verificare che F è un'isometria di $\mathbf{R}^2$.
   (b) Verificare che F non ha punti fissi.
   (c) Che differenza c'è tra questa isometria e quella precedente?

9. Sia $R_{\theta,P}$ rotazione di $\mathbf{R}^2$ di un angolo $\theta = \pi/2$ intorno al punto $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (i) Calcolare la formula generale di $R_{\theta,P}$.
   (ii) Determinare le immagini tramite $R_{\theta,P}$ dei punti $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (iii) Determinare l'immagine tramite $R_{\theta,P}$ della circonferenza $x^2 + y^2 = 4$.

10. Sia l la retta di $\mathbf{R}^2$ di equazione $X + 2Y = 1$.
    (i) Scrivere la formula generale della riflessione R_l rispetto alla retta l.
    (ii) Calcolare $R_l(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $R_l(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix})$, $R_l(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix})$.
    (iii) Calcolare l'immagine tramite R_l della retta $2X - Y = 0$.
    (iv) Calcolare l'immagine tramite R_l della retta $X - 3Y = 0$.

11. Dato il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, completarlo ad una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ orientata positivamente.

12. Scrivere la formula generale della rotazione $R_{\theta,\mathbf{v}}$ di $\mathbf{R}^3$ di un angolo $\theta = -\pi/2$ intorno al vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

13. Sia π il piano di equazione $X - 2Y = 0$ in $\mathbf{R}^3$.
    (i) Scrivere la formula generale della riflessione S_π rispetto a π.
    (ii) Calcolare $S_\pi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $S_\pi(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix})$, $S_\pi(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.
    (iii) Calcolare l'immagine tramite S_π del piano $Y = 0$.

14. Sia data la trasformazione $L\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
    (i) Verificare che L è un'isometria di $\mathbf{R}^3$.
    (ii) Determinare autovalori e autospazi di L.
    (iii) Dare un'interpretazione geometrica di L.

15. Sia $M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ e sia $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, definita da
$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$
    (i) Far vedere che M è una matrice ortogonale.
    (ii) Determinare i punti fissi di F.
    (iii) Dare un'interpretazione geometrica di F.

16. Sia $L_M\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'applicazione lineare data da $X \mapsto MX$, dove M è una matrice ortogonale $n \times n$. Sia $U \subset \mathbf{R}^n$ un sottospazio e sia $U^\perp$ il suo complemento ortogonale. Far vedere che se $L_M(U) = U$, allora anche $L_M(U^\perp) = U^\perp$.

17. Sia $L_M\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'applicazione lineare data da $X \mapsto MX$, dove M è una matrice ortogonale $n \times n$.

(i) Verificare che se λ è un autovalore reale di M, allora $\lambda = \pm 1$.

(ii) Verificare che se gli autospazi V_1 e V_{-1} sono entrambi diversi da zero, allora sono ortogonali fra loro, cioè $v \cdot w = 0$, per ogni $v \in V_1$ ed ogni $w \in V_{-1}$ (usare la definizione di autovettore).

(iii) Dare un'interpretazione geometrica di L_M nel caso di una matrice M ortogonale 3×3 avente un unico autovalore reale $\lambda = 1$ con autospazio V_1 di dimensione 1.

(iii) Dare un'interpretazione geometrica di L_M nel caso di una matrice M ortogonale 3×3 avente autovalori reali con autospazi V_1 di dimensione 2 e V_{-1} di dimensione 1.

18. Con il metodo dei minimi quadrati, determinare una "soluzione approssimativa" (è unica?) del sistema lineare

$$AX = b, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

19. Siano dati i punti del piano

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \in \mathbf{R}^2.$$

(i) Determinare la retta $y = kx$ che li approssima meglio.

(ii) Determinare la parabola $y = a + bx + cx^2$ che li approssima meglio.