1. Disegnare l'insieme $A = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\| = 2\}$.

2. Disegnare l'insieme $A = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$.

3. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$.
   (a) Determinare e disegnare l'insieme A di tutti i vettori di $\mathbf{R}^2$ che sono ortogonali a $\mathbf{v}$.
   (b) Verificare che A è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$.
   (c) Esibire tre elementi distinti di A.
   (d) Esistono due elementi di A ortogonali fra loro ?
   (e) Determinare e disegnare tutti gli elementi di A che hanno norma uguale ad 1.

4. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$.
   (a) Determinare e disegnare l'insieme A di tutti i vettori di $\mathbf{R}^3$ che sono ortogonali a $\mathbf{v}$.
   (b) Verificare che A è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$.
   (c) Esibire tre elementi distinti di A.
   (d) Esibire due elementi di A che siano ortogonali fra loro. Posso trovarne tre?
   (e) Disegnare tutti gli elementi di A che hanno norma uguale ad 1.

5. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$.
   (a) Determinare la formula generale per la proiezione ortogonale $\pi_{\mathbf{v}}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix})$ di un vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ su $\mathbf{v}$.
   (b) Verificare che si tratta di un'applicazione lineare.
   (c) Determinare il nucleo di $\pi_{\mathbf{v}}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix})$.

6. Sia $V = \mathbf{R}^3$ con il prodotto scalare canonico. Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (i) Far vedere che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formano una base per $\mathbf{R}^3$.
   (ii) A partire dalla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ tramite il procedimento di Gram-Schmidt costruire una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

7. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$.
   (a) Completare $\mathbf{v}$ ad una base ortogonale di $\mathbf{R}^2$.
   (b) Determinare $\mathbf{v}^{\perp}$, il complemento ortogonale di $\mathbf{v}$.

8. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$.

(a) Completare $\mathbf{v}$ ad una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$.
(b) Determinare $\mathbf{v}^\perp$, il complemento ortogonale di $\mathbf{v}$.
(c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ i vettori trovati al punto (a). Determinare il complemento ortogonale di $\operatorname{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$.

9. Sia dato il sottospazio $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 0 \}$.
   (a) Determinare la distanza di $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ da W.
   (b) Determinare la distanza di $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dal complemento ortogonale $W^\perp$ di W in $\mathbf{R}^3$.
   (c) Scomporre P come somma di vettori $P = P_W + P_{W^\perp}$, con $P_W \in W$ e $P_{W^\perp} \in W^\perp$.

10. Sia dato il sottospazio $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \}$.
   (a) Determinare la distanza di $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ da W.
   (b) Determinare il complemento ortogonale $W^\perp$ di W in $\mathbf{R}^4$.
   (c) Scomporre P come somma di vettori $P = P_W + P_{W^\perp}$, con $P_W \in W$ e $P_{W^\perp} \in W^\perp$.

11. Sia dato il sottospazio $W = \operatorname{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \}$ di $\mathbf{R}^3$.
   (a) Determinare equazioni cartesiane per W (per esempio sfruttando il prodotto vettoriale).
   (b) Determinare il complemento ortogonale $W^\perp$ di W.

12. Consideriamo lo spazio $\mathbf{R}^n$ con il prodotto scalare canonico $\langle -, - \rangle$. Sia $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ un vettore con $\|\mathbf{v}\| = 1$. Definiamo $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ mediante $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$, per $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.
   (i) Dimostrare che f è lineare.
   (ii) Far vedere che $f^2 = f$.
   (iii) Determinare nucleo ed immagine di f.
   (iv) Calcolare autovalori ed autospazi di f.
   (v) Geometricamente cosa fa f?

13. Consideriamo lo spazio $\mathbf{R}^n$ con il prodotto scalare canonico $\langle -, - \rangle$. Sia $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ un vettore con $\|\mathbf{v}\| = 1$. Definiamo $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ mediante $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$, per $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.
   (i) Dimostrare che f è lineare.
   (ii) Far vedere che $f^2 = f$.
   (iii) Determinare nucleo ed immagine di f.
   (iv) Calcolare autovalori ed autospazi di f.
   (v) Geometricamente cosa fa f?

14. Sia W un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ di dimensione k. Sia $\pi_W : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ la proiezione ortogonale sul sottospazio W.
   (a) Verificare che $\pi_W \circ \pi_W = \pi_W$.
   (b) Determinare il nucleo di π_W e la sua dimensione.
   (c) Determinare $\{X \in \mathbf{R}^n \mid \pi_W(X) = X\}$ e la sua dimensione.
   (d) Concludere che π_W è diagonalizzabile.