(1) Sia $\pi: \ X = P + tA + sB, \ t, s \in \mathbf{R}$ una piano in $\mathbf{R}^3$.
  (i) Dimostrare che π è una superficie (parametrizzata) regolare in tutti i punti.
  (ii) Calcolare il piano tangente e il versore normale ad π al variare di t, s.
  (iii) Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di π.
  (iv) Calcolare la curvatura media e la curvatura gaussiana di π.

(2) Sia $S = S(u, v)$ una superficie regolare. Sia $P = S(u_0, v_0)$ un punto non planare e non umbilicale, dove i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale soddisfano

$$F = S_u \cdot S_u = 0, \qquad f = N \cdot S_{uu} = 0.$$

Far vedere che le curvature principali (il massimo e il minimo della curvatura normale $k_N(\gamma)$, al variare delle curve γ su S passanti per P) sono date da

$$k_1 = \frac{e}{E}, \qquad k_2 = \frac{g}{G}$$

e sono assunte rispettivamente sulle curve $u = u_0$ e $v = v_0$.

(3) *Cilindro.* Sia $S\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la superficie data da

$$S(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{pmatrix}, \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbf{R}.$$

  (i) Dimostrare che S coincide con la superficie data dall'equazione $x^2 + y^2 = 1$.
  (ii) Dimostrare che S è regolare in tutti i punti e che in ogni punto di S il piano tangente è un piano verticale.
  (iii) Verificare che S è una superficie rigata sviluppabile.
  (iv) Verificare che S è una superficie di rotazione.
  (v) Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di S e confrontarle con quelle di un piano.
  (vi) Calcolare la curvatura media e la curvatura gaussiana di S.

(4) Dimostrare che

$$S(u, v) = \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \\ 2u^2 + 2v^2 \end{pmatrix}, \qquad T(a, b) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

sono parametrizzazioni equivalenti del paraboloide $z = x^2 + y^2$.

(5) *Iperboloide a due falde.* Sia γ la curva del piano (y, z) data da $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh t \\ 2\cosh t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbf{R}$.
  (i) Determinare una parametrizzazione della superficie ottenuta ruotando γ attorno all'asse z e determinare un'equazione che definisce S.
  (ii) Determinare i punti in cui S è regolare.
  (iii) Calcolare i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale di S nei punti regolari.
  (iv) Determinare il segno della curvatura gaussiana di S (nei punti regolari).

(6) *Iperboloide a una falda.* Sia γ la curva del piano (y,z) data da $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cosh t \\ 2\sinh t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$.

(i) Determinare una parametrizzazione della superficie ottenuta ruotando γ attorno all'asse z e determinare un'equazione che definisce S.

(ii) Determinare i punti in cui S è regolare.

(iii) Determinare i punti di S dove la curvatura gaussiana è massima.

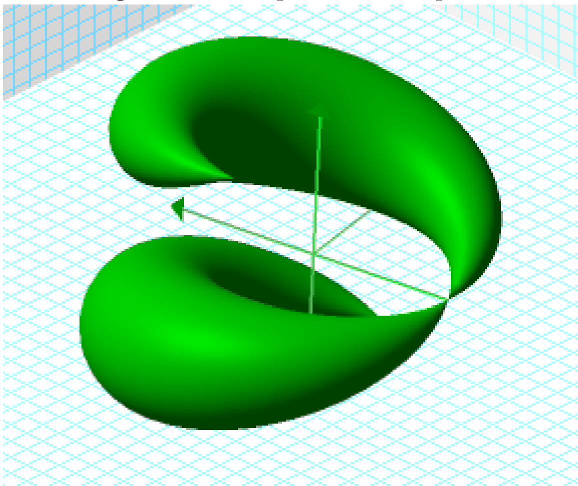
(iv) Determinare le linee di curvatura dove la curvatura gaussiana è massima.

(v) Scegliere un punto $P \in S$ e determinare una curva su S, passante per P, con curvatura normale nulla.

(7) Determinare se le seguenti superfici sono rigate sviluppabili

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u - v\sin u \\ \sin u + v\cos u \\ v \end{pmatrix}, \qquad T(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u - v\sin u \\ \sin u + v\cos u \\ u \end{pmatrix}.$$

(8) Discutere il segno della curvatura gaussiana nei punti della superficie della figura



(9) Ruotare la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$, attorno all'asse z. Che superficie si trova?

(10) Sanini, Esercizi Cap. VI, N. 1.1, 1.2, 1.4, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4.