

- (1) Sia  $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  la curva definita da  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos t^2 \\ te^t \end{pmatrix}$ .
- (i) Determinare se  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$  appartengono alla traiettoria di  $\gamma$ .
  - (ii) Determinare tre punti  $P, Q, R$  sulla traiettoria di  $\gamma$ .
  - (iii) Determinare se  $\gamma$  è una curva regolare.
  - (iv) Determinare la retta tangente alla curva in  $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
  - (v) Determinare in quali punti il piano normale alla curva è parallelo all'asse  $z$ .

- (2) Sia  $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  la curva definita da  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \\ e^t \end{pmatrix}$ .
- (i) Verificare che  $\gamma$  è una curva regolare.
  - (ii) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva parametrizzato dall'intervallo  $t \in [0, \pi]$ .
  - (iii) Determinare se  $\gamma$  è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

- (3) Siano  $\gamma, \tilde{\gamma}$  le curve in  $\mathbf{R}^3$  definite rispettivamente da

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \\ e^t \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R} \quad \tilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \log t \\ \sin \log t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}^+.$$

Far vedere che  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  sono parametrizzazioni equivalenti della stessa curva.

- (4) Siano  $\gamma, \tilde{\gamma}$  le curve in  $\mathbf{R}^2$  definite rispettivamente da

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t \in ]0, 2\pi] \quad \tilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \end{pmatrix}, t \in ]0, \sqrt{2\pi}].$$

Far vedere che sono due parametrizzazioni equivalenti della circonferenza di equazione  $x^2 + y^2 = 1$ .

- (5) Sia  $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  la curva definita da

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}.$$

- (i) Far vedere che il supporto della curva è contenuto nell'iperbole di equazione  $x^2 - y^2 = 1$ .
- (ii) Calcolare la curvatura di  $\gamma$  al variare di  $t$ .
- (iii) Determinare il cerchio osculatore a  $\gamma$  nei punti di curvatura massima.

- (6) Sia  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$  la curva definita da

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}.$$

- (i) Determinare il punto della traiettoria di  $\gamma$  dove la curvatura è minima.
- (ii) Determinare il cerchio osculatore in quel punto.

- (7) Sia  $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  la curva definita da  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \\ t \end{pmatrix}$ .

- (i) Determinare se  $\gamma$  è una curva piana.
- (ii) Calcolare la curvatura di  $\gamma$  al variare di  $t$ .

(8) Sia  $\gamma: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}^3$  la curva definita da  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ (1+t)/t \\ (1-t^2)/t \end{pmatrix}$ .

- (i) Verificare che  $\gamma$  è una curva piana.

(9) Sia  $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  una curva polinomiale di grado due

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t + c_1 t^2 \\ a_2 + b_2 t + c_2 t^2 \\ a_3 + b_3 t + c_3 t^2 \end{pmatrix}.$$

- (i) Far vedere che  $\gamma$  è una curva piana, ossia è contenuta in un piano di  $\mathbf{R}^3$ .
- (ii) Determinare il piano che contiene la curva

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 + t^2 \\ t - t^2 \\ 1 - t - 2t^2 \end{pmatrix}.$$

(10) Sia  $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  la curva definita da  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ .

- (i) Verificare che  $\gamma$  non è piana, ossia non è contenuta in nessun piano di  $\mathbf{R}^3$ .
- (ii) Determinare il cerchio osculatore alla curva nel punto  $\gamma(1)$ .
- (iii) Calcolare la curvatura di  $\gamma$  al variare di  $t$ .
- (iv) Calcolare la torsione di  $\gamma$  al variare di  $t$ .

(11) Sanini, Esercizi Cap. VI, N. 1.2, 1.3, 1.4, 1.5.1 e 1.5.2, 1.6, 1.7.

(12) Verificare che lunghezza d'arco, curvatura e torsione di una curva parametrizzata (purché definiti) sono invarianti rispetto alle trasformazioni rigide.

(13) Siano  $P, Q, R, S$  quattro punti distinti in  $\mathbf{R}^3$ .

- (i) Dimostrare che esiste un'unica curva polinomiale di grado tre  $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t + c_1 t^2 + d_1 t^3 \\ a_2 + b_2 t + c_2 t^2 + d_2 t^3 \\ a_3 + b_3 t + c_3 t^2 + d_3 t^3 \end{pmatrix}$$

che passa per  $P, Q, R, S$ , per valori del parametro dati rispettivamente da  $t = t_1, t_2, t_3, t_4$ .

- (ii) Determinare la cubica passante per  $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , per valori del parametro dati rispettivamente da  $t = -1, 0, 1, 2$ .

(14) Siano  $P, Q$  due punti distinti in  $\mathbf{R}^3$  e siano  $U, V$  due vettori in  $\mathbf{R}^3$ .

- (i) Dimostrare che esiste un'unica curva polinomiale di grado tre  $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  che passa per  $P$  e  $Q$  con vettori tangenti rispettivamente uguali a  $U$  e  $V$ , per valori del parametro dati rispettivamente da  $t = t_1, t_2$ .

- (ii) Determinare la cubica passante per  $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , per valori del parametro dati rispettivamente da  $t = t_1, t_2$  e con tangente uguale a  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .