(1) Siano $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(i) Trovare le formule per la traslazione $T_{\mathbf{p}}$.

(ii) Calcolare $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(iii) Calcolare $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(iv) Calcolare $(T_{\mathbf{q}} \circ T_{3\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(T_{3\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{q}}) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(2) Sia Q il trapezio in $\mathbf{R}^2$ di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Disegnare l'immagine di Q dopo la traslazione $T_{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)}$.

(ii) Disegnare l'immagine di Q dopo la riflessione S_0 data dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(iii) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione R_π data dalla matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(iv) Disegnare l'immagine di Q dopo la dilatazione $D_{4,3}$.

(v) Disegnare l'immagine di Q dopo l'omotetia $D_{1/2}$.

(vi) Disegnare l'immagine di Q dopo lo shear N_1.

(3) Sia Q il quadrato in $\mathbf{R}^2$ di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione $R_{\pi/2}$.

(ii) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione R_π.

(iii) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione $R_{3\pi/2}$.

(iv) Disegnare l'immagine di Q dopo la dilatazione $D_{2,3}$.

(v) Disegnare l'immagine di Q dopo l'omotetia D_2.

(vi) Disegnare l'immagine di Q dopo lo shear N_{-1}.

(4) Sia Q il quadrato in $\mathbf{R}^2$ di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione $R_{\pi/2}$.

(ii) Per quali angoli φ la rotazione R_φ manda il quadrato in se stesso?

(iii) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione $R_{\pi/4}$.

(iv) Disegnare l'immagine di Q dopo la dilatazione $D_{2,1}$.

(v) Disegnare l'immagine di Q dopo l'omotetia D_3.

(vi) Disegnare l'immagine di Q dopo lo shear N_3.

(5) Siano $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ i punti di $\mathbf{R}^2$ di coordinate

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(i) Per quali angoli φ la rotazione R_φ manda l'esagono di vertici $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ in se stesso?

(6) Sia $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Trovare le formule per la rotazione R di centro $\mathbf{p}$ ed angolo $\pi/2$.

(ii) Trovare le formule per la rotazione R' di centro $\mathbf{p}$ ed angolo $-\pi/4$.

(iii) Sia l la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando R ad l.

(iv) Sia m la retta di equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = 7.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando R' ad l.

(7) Sia l la retta di equazione $x_1 + x_2 = 0$.

(i) Calcolare le formule della riflessione rispetto ad l.

(ii) Calcolare le immagini dei punti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Calcolare l'immagine della retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

(8) Sia Q il quadrato dell'Eserc.3. Calcolare l'immagine di Q dopo la riflessione rispetto

(i) all'asse delle ascisse.

(ii) all'asse delle ordinate.

(iii) alla retta di equazione $x_1 = x_2$.

(9) Sia Q il quadrato dell'Eserc.4. Calcolare l'immagine di Q dopo la riflessione rispetto

(i) all'asse delle ascisse.

(ii) all'asse delle ordinate.

(iii) alla retta di equazione $x_1 = x_2$.

(iv) Trovare tutte le riflessioni S_φ che mandano Q in se stesso.

(10) Siano $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ i punti dell'Eserc.5. Calcolare l'immagine dell'esagono di vertici Q_i dopo la riflessione rispetto

(i) all'asse delle ascisse.

(ii) all'asse delle ordinate.

(iii) la retta di equazione $\sqrt{3}x_1 + x_2 = 0$.

(iv) Trovare tutte le riflessioni S_φ che mandano l'esagono in se stesso.

(11) Sia S la riflessione rispetto alla retta l di equazione cartesiana $3x_1 + 4x_2 = 0$.

(i) Calcolare la tangente dell'angolo φ formato da l con l'asse delle ascisse.

(ii) Calcolare le formule per S.

(12) Sia S la riflessione rispetto alla retta l di equazione cartesiana $3x_1 + 4x_2 = 0$.

(i) Calcolare le formule della riflessione S_0 rispetto all'asse delle ascisse.

(ii) Vedere se

$$S = R_{-\varphi} \circ S_0 \circ R_\varphi.$$

(Suggerimento: calcolare le formule per R_φ e per S).

(13) Sia l la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}$$

e sia m la retta di equazione $x_1 = 0$.

(i) Trovare le formule della riflessione S rispetto ad l.

(ii) Calcolare le formule della riflessione S' rispetto ad m.

(iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S \circ S'.$$

(iv) Calcolare le formule per la trasformazione composta

$$S' \circ S.$$

(v) Geometricamente, che cosa fanno $S \circ S'$ e $S' \circ S$?

(14)) Sia l la retta di equazione $x_1 = 1$ e sia m la retta di equazione $x_2 = 2$.

(i) Calcolare le formule della riflessione S rispetto ad l.

(ii) Calcolare le formule della riflessione S' rispetto ad m.

(iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S \circ S'.$$

(iv) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S' \circ S.$$

(v) Geometricamente, che cosa fanno $S \circ S'$ e $S' \circ S$?

(15) Calcolare autovalori e autospazi della matrice

$$\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \operatorname{sen} 2\varphi \\ \operatorname{sen} 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in \mathbf{R}.$$

Interpretare geometricamente il risultato.

(16) Calcolare gli autovalori della matrice

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in \mathbf{R},\ \varphi \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Interpretare geometricamente il risultato. Cosa succede per $\varphi = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$?

(17) Sia $M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$. Interpretare geometricamente l'isometria $F\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x}$.

(18) Sia $M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$. Interpretare geometricamente l'isometria $F\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x}$.

(19) Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare l'orientazione di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

(ii) Calcolare l'orientazione di $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$.

(iii) Sia S_0 la riflessione rispetto all'asse delle ascisse. Calcolare $\operatorname{Or}(S_0(\mathbf{v}), S_0(\mathbf{w}))$.

(iv) Sia S_φ la riflessione rispetto alla retta passante per $\mathbf{0}$ e formante un angolo φ con l'asse delle ascisse. Calcolare $\operatorname{Or}(S_\varphi(\mathbf{v}), S_\varphi(\mathbf{w}))$.

(20) Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Sia $R_{\pi/2}$ la rotazione di centro $\mathbf{0}$ e angolo $\pi/2$. Calcolare $\operatorname{Or}(R_{\pi/2}(\mathbf{v}), R_{\pi/2}(\mathbf{w}))$.

(ii) Sia R_φ la rotazione di centro $\mathbf{0}$ e angolo φ. Calcolare $\operatorname{Or}(R_\varphi(\mathbf{v}), R_\varphi(\mathbf{w}))$.

(21) Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Siano $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(t)}$ le riflessioni rispetto a delle rette passanti per $\mathbf{0}$. Sia $S = S^{(1)} \circ S^{(2)} \circ \ldots \circ S^{(t)}$. Calcolare l'orientazione $\mathrm{Or}(S(\mathbf{v}), S(\mathbf{w}))$.

(22) Sia $D_{2,5}$ la dilatazione data dalla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(i) Trovare una dilatazione $D_{\lambda,\mu}$ tale che $D_{\lambda,\mu} \circ D_{2,5}$ sia l'applicazione identica.

(ii) Trovare una dilatazione $D_{\lambda,\mu}$ tale che $D_{2,5} \circ D_{\lambda,\mu}$ sia l'applicazione identica.

(23) Per quali dilatazioni $D_{\lambda,\mu}$ abbiamo che $D_{\lambda,\mu} \circ D_{\lambda,\mu}$ è l'applicazione identica?

(24) Dimostrare che una dilatazione $D_{\lambda,\mu}$ conserva le direzioni delle rette se e solo se $\lambda = \mu$.

(25) Calcolare l'inversa della trasformazione (shear) N_5.