1. Sia data $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, per $t \in \mathbf{R}$.
   (a) Determinare $\gamma'(t)$, al variare di $t \in \mathbf{R}$.
   (b) Disegnare la traiettoria di γ.
   (c) Determinare una parametrizzazione di γ rispetto alla lunghezza d'arco.

2. Siano date $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^6 \\ t^9 \end{pmatrix}$, $\sigma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ e $\tau(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^4 \\ t^6 \end{pmatrix}$ per $t \in \mathbf{R}$.
   (a) Determinare se γ, σ e τ definiscono curve parametrizzate regolari.
   (b) Determinare se le traiettorie di γ, σ e τ coincidono.

3. Sia data $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$, per $t \in \mathbf{R}$.
   (a) Fare un disegno approssimativo della curva.
   (b) Determinare se γ definisce una curva parametrizzata regolare.

4. Verificare che la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t - \frac{1}{2} \\ \cos t \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$ sta nell'intersezione della sfera di centro $C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e raggio 1 con il cilindro retto $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

5. Sia data la spirale logaritmica $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$, con $t \in \mathbf{R}$.
   (a) Calcolare la lunghezza dell'arco di spirale $\gamma([-\pi, \pi])$.
   (b) Verificare che $\gamma(t)$ e $\gamma'(t)$ formano un angolo costante $\theta = \pi/4$ al variare di t.

6. Sia data l'ellisse $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, di semiassi $a > b > 0$.
   (a) Verificare che $\gamma'(t)$ e $\gamma''(t)$ non sono ortogonali fra loro per $t \neq 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.
   (b) Calcolare il versore tangente e il versore normale a $\gamma(t)$, al variare di t.
   (c) Determinare e disegnare l'*evoluta* di γ, ossia la curva descritta dai centri dei cerchi osculatori a γ al variare di t.
   (d) Chi è l'*evoluta* di γ quando $a = b$?

7. Fissati $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$, sia data l'elica cilindrica $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ bt \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$.
   (a) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva $\gamma([0, 3\pi])$.
   (b) Determinare curvatura e torsione di γ al variare di $t \in \mathbf{R}$.
   (c) Verificare che al variare di t il vettore tangente $\gamma'(t)$ forma un angolo costante con un vettore fissato $\mathbf{v}$ di norma unitaria $\|\mathbf{v}\| = 1$ (ad esempio $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$).
   (d) Determinare il triedro di Frenet di γ.

8. Sia data la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \cos t, \\ 1 - \sin t \\ -\frac{3}{5} \cos t \end{pmatrix}$, per $t \in \mathbf{R}$.
   (a) Verificare che γ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

(b) Verificare che γ è una curva piana e determinare il piano su cui giace.
(c) Verificare che γ è una circonferenza. Determinarne centro e raggio.

9. Sia data la circonferenza $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$. Sia $S(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ la riflessione rispetto all'asse x_2.
(a) Determinare $S(\gamma)$, l'immagine di γ tramite S.
(b) Verificare che γ e $S(\gamma)$ sono percorse in senso opposto.
(c) Calcolare e confrontare la curvatura con segno di γ e di $S(\gamma)$.

10. Sia data l'elica cilindrica $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \\ \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \\ \frac{t}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$. Sia $S(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$ la riflessione rispetto al piano $(x_1, x_2/$.
(a) Determinare $S(\gamma)$, l'immagine di γ tramite S.
(b) Verificare che γ ed $S(\gamma)$ hanno la stessa curvatura.
(c) Verificare che γ ed $S(\gamma)$ torsione opposta.