

1. Data la circonferenza unitaria
- \mathcal{C}
- in
- \mathbf{R}^2

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

determinare l'intersezione di \mathcal{C} con la retta verticale $x_1 = a$, al variare di $a \in \mathbf{R}$.

2. Data la sfera unitaria
- \mathcal{S}
- in
- \mathbf{R}^3

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

determinare l'intersezione di \mathcal{S} con il piano orizzontale $x_3 = a$, al variare di $a \in \mathbf{R}$.

3. Disegnare le seguenti coniche in
- \mathbf{R}^2
- e dire di che cosa si tratta:

$$x_1^2 = 2, \quad (x_1 - 1)^2 = 0, \quad x_1^2 - 3x_2^2 = 0, \quad x_1^2 - 3x_2^2 = 2, \quad x_1^2 + 3x_2^2 = 2, \quad x_2 = 2x_1^2 + 3.$$

4. Data la conica
- \mathcal{C}
- in
- \mathbf{R}^2

$$x_1^2 - x_1x_2 = 1$$

- (a) Determinare almeno 3 punti su \mathcal{C} .
 (b) Verificare che \mathcal{C} è simmetrica rispetto all'origine.
 (c) Determinare se \mathcal{C} è simmetrica rispetto agli assi cartesiani.

5. Data la conica
- \mathcal{C}
- in
- \mathbf{R}^2

$$x_1^2 - 2x_1x_2 = 1$$

- (a) Determinare una forma canonica metrica di \mathcal{C} e dire di che tipo di conica si tratta.
 (b) Scrivere un cambiamento di coordinate isometrico che la porti in tale forma.
 (c) Disegnarla nel sistema di riferimento x_1, x_2 .

6. Sia data l'ellisse
- \mathcal{E}
- in
- \mathbf{R}^2

$$x_1^2 + 4x_2^2 = 1.$$

- (a) Verificare che i punti $\begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{1}{2} \sin t \end{pmatrix}$ appartengono a \mathcal{E} per ogni $t \in \mathbf{R}$. Descrivono tutta l'ellisse?
 (b) Verificare che in generale i punti $\begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$ appartengono all'ellisse di equazione $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$.

7. Sia data l'iperbole
- \mathcal{I}
- in
- \mathbf{R}^2

$$x_1^2 - 4x_2^2 = 1.$$

- (a) Verificare che i punti $\begin{pmatrix} \cosh t \\ \frac{1}{2} \sinh t \end{pmatrix}$ appartengono a \mathcal{I} per ogni $t \in \mathbf{R}$. Descrivono tutta l'iperbole?
 (b) Verificare che in generale i punti $\begin{pmatrix} a \cosh t \\ b \sinh t \end{pmatrix}$ appartengono all'iperbole di equazione $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$.

8. Degli esercizi in fondo alle dispense sulle coniche, tralasciare il gruppo 7.M.