1. Per ognuna delle matrici simmetriche in (1) determinare gli autovalori ed una base ortonormale di autovettori:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

2. Per ognuna delle matrici simmetriche in (1) scrivere la forma quadratica associata, determinarne una forma canonica metrica, e scrivere il cambiamento di coordinate isometrico che la porta in tale forma.

3. Per ognuna delle forme quadratiche del punto precedente, determinare massimo e minimo sulla sfera unitaria S. Determinare i vettori di S su cui tali valori sono assunti.

4. Sia A una matrice simmetrica. Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ l'applicazione definita da $\langle X, Y\rangle := {}^tXAY$, per $X, Y \in \mathbf{R}^n$. Verificare che $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ha le seguenti proprietà:
   (a) È bilineare (ossia è lineare in ognuna delle variabli X e Y);
   (b) È simmetrica (ossia $\langle X, Y\rangle = \langle Y, X\rangle$, per ogni X, Y);
   (c) È definita positiva (ossia $\langle X, X\rangle > 0$, per ogni $X \neq 0$) se e solo se tutti gli autovalori di A sono positivi.
   (d) Verificare che se A è la matrice identità di ordine n, l'applicazione $\langle X, Y\rangle$ non è altro che il prodotto scalare canonico su $\mathbf{R}^n$.