1. Disegnare l'insieme $A = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid \|\mathbf{x} - P\| = 3\}$, con $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e determinare la sua intersezione con la retta $x_1 = 3$.

2. Determinare l'insieme $A = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{cases} \|\mathbf{x}\| = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases}\}$. Di che cosa si tratta? Determinare l'insieme $B = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{cases} \|\mathbf{x}\| = 2 \\ x_1 = 1 \end{cases}\}$. Di che cosa si tratta? Determinare l'insieme $C = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{cases} \|\mathbf{x}\| = 2 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}\}$. Di che cosa si tratta?

3. Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$.
   (a) Determinare e disegnare l'insieme A di tutti i vettori di $\mathbf{R}^2$ che sono ortogonali a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.
   (b) Verificare che A è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$.
   (c) Di quale spazio sottospazio vettoriale si tratta?
   (d) Esistono due elementi distinti di A ortogonali fra loro ?

4. Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$.
   (a) Determinare e disegnare l'insieme A di tutti i vettori di $\mathbf{R}^3$ che sono ortogonali a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.
   (b) Verificare che A è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$.
   (c) Esibire tre elementi distinti di A.
   (d) Esistono due elementi di A ortogonali fra loro?
   (e) Disegnare tutti gli elementi di A che hanno norma uguale ad 1.

5. Sia $U = \mathrm{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ con $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$.
   (a) Determinare la formula generale per la proiezione ortogonale $\pi_U(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix})$ di un vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ su $\mathbf{v}$ e verificare che si tratta di un'applicazione lineare.
   (b) Verificare che $\pi_U \circ \pi_U(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \pi_{\mathbf{v}}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix})$ per ogni $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
   (c) Determinare autovalori e autospazi di π_U (non servono calcoli).

6. Sia $V = \mathbf{R}^3$ con il prodotto scalare canonico. Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (i) Far vedere che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formano una base per $\mathbf{R}^3$.
   (ii) A partire dalla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ tramite il procedimento di Gram-Schmidt costruire una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.
   (iii) Costruire una base ortonormale di $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ e di $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

7. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$.
   (a) Completare $\mathbf{v}$ ad una base ortogonale di $\mathbf{R}^2$.
   (b) Determinare $\mathbf{v}^\perp$, il complemento ortogonale di $\mathbf{v}$.
   (c) Determinare $(\mathbf{v}^\perp)^\perp$, il complemento ortogonale di $\mathbf{v}^\perp$.

8. Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$.
   (a) Completare $\mathbf{v}_1$ ad una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$.
   (b) Determinare $\mathbf{v}_1^\perp$, il complemento ortogonale di $\mathbf{v}_1$.
   (c) Siano $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ i vettori trovati al punto (a). Determinare il complemento ortogonale di $\mathrm{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$.
   (d) Completare $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ad una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$.
   (e) Determinare $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}^\perp$, il complemento ortogonale di $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

9. Sia dato il sottospazio $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 0\}$.
   (a) Determinare la distanza di $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ da W.
   (b) Determinare la distanza di $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dal complemento ortogonale $W^\perp$ di W in $\mathbf{R}^3$.
   (c) Scomporre P come somma di vettori $P = P_W + P_{W^\perp}$, con $P_W \in W$ e $P_{W^\perp} \in W^\perp$.

10. Sia dato il sottospazio $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \}$.
   (a) Determinare la distanza di $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ da W e da $W^\perp$.
   (b) Chi sono i punti che hanno distanza zero rispettivamente da W e da $W^\perp$?

11. Sia A una matrice simmetrica. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ l'applicazione definita da $\langle X, Y \rangle := {}^t XAY$, per $X, Y \in \mathbf{R}^n$. Verificare che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ha le seguenti proprietà:
   (a) È bilineare (ossia è lineare in ognuna delle variabli X e Y);
   (b) È simmetrica (ossia $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$, per ogni X, Y);
   (c) È definita positiva (ossia $\langle X, X \rangle > 0$, per ogni $X \neq 0$) se e solo se tutti gli autovalori di A sono positivi.
   (d) Verificare che se A è la matrice identità di ordine n, l'applicazione $\langle X, Y \rangle$ non è altro che il prodotto scalare canonico su $\mathbf{R}^n$.

12. Sia dato un piano $V = \mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ in $\mathbf{R}^3$ munito del prodotto scalare canonico. Siano $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{w} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2$ generici vettori di V.
   (a) Verificare che al variare di $\mathbf{v} \in V$, il quadrato della norma $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ definisce una forma quadratica nelle variabili (α_1, α_2) la cui matrice simmetrica associata è data da $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$.
   (b) Possiamo affermare che la matrice $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$ ha autovalori strettamente positivi?

(c) Verificare che al variare di $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, il prodotto scalare $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ coincide con l'espressione

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

13. Siano dati i vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^3$ e sia $V = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

(a) Determinare la matrice $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$.

(b) Sia $\mathbf{v}$ il vettore di coordinate $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in V$. Determinare le coordinate di $\mathbf{v}$ in $\mathbf{R}^3$.

(c) Verificare che la norma di $\mathbf{v}$ in $\mathbf{R}^3$ coincide con l'espressione

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$