1. Sia $\pi: \quad S(u,v) = P + uA + vB$, un piano in $\mathbf{R}^3$ scritto in forma parametrica.
   (a) Calcolare i coefficienti della prima e della seconda forma quadratica fondamentale di π al variare di u e v.
   (b) Verificare che ogni punto di π è planare e dare un'interpretazione geometrica di questo fatto.
   (c) Verificare che la curvatura Gaussiana di un piano in $\mathbf{R}^3$ è identicamente nulla.

2. Sia dato il cilindro $\mathcal{C}: \quad S(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos\frac{u}{R} \\ R\sin\frac{u}{R} \\ v \end{pmatrix}$, per $u \in [0, 2\pi R],\ v \in \mathbf{R}$.
   (a) Calcolare i coefficienti della prima e della seconda forma quadratica fondamentale di $\mathcal{C}$ al variare di u e v e confrontarle con quelle di un piano. Osservare che in questo caso la seconda forma fondamentale è semidefinita.
   (b) Verificare che la curvatura Gaussiana di $\mathcal{C}$ è identicamente nulla.
   (c) Disegnare il cilindro e indicare sulla figura il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (d) Determinare una sezione normale di $\mathcal{C}$ in P con curvatura zero e una sezione normale di $\mathcal{C}$ in P con curvatura diversa da zero.

3. Sia data la sfera $\mathcal{S}: \quad S(\theta,u) = \begin{pmatrix} R\sin\theta\cos u \\ R\cos\theta\cos u \\ R\sin u \end{pmatrix}$, per $\theta \in [0, 2\pi],\ u \in [-\pi/2, \pi/2]$.
   (a) Calcolare i coefficienti della prima e della seconda forma quadratica fondamentale di $\mathcal{S}$ al variare di θ e u.
   (b) Disegnare la sfera e indicare sulla figura il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (c) Chi sono le sezioni normali alla sfera in P? Che curvatura hanno?
   (d) Siano E, F, G, e, f, g i coefficienti della prima e della seconda forma quadratica fondamentale di $\mathcal{S}$ in P. Verificare che la funzione

$$k_N(x,y) = \frac{ex^2 + gy^2 + 2fxy}{Ex^2 + Gy^2 + 2Fxy}$$

   è costante al variare di x, y e vale $\frac{1}{R}$. Dare un'interpretazione geometrica di questo fatto alla luce di quanto trovato al punto (c).

4. Sia dato il paraboloide $\mathcal{P}: \quad S(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}$,per $u, v \in \mathbf{R}$.
   (a) Calcolare i coefficienti E, F, G, e, f, g della prima e della seconda forma quadratica fondamentale di $\mathcal{P}$ in $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e scrivere la funzione

$$k_N(x,y) = \frac{ex^2 + gy^2 + 2fxy}{Ex^2 + Gy^2 + 2Fxy}$$

   che esprime le curvature normali delle curve sul paraboloide passanti per P.
   (b) Chi sono le sezioni normali al paraboloide in P?
   (c) Confrontare e dare un'interpretazione geometrica di quanto trovato ai punti (a) e (b).
   (d) Quanto trovato nel punto P vale anche negli altri punti di $\mathcal{P}$? Spiegare.

(e) Cosa possiamo dire sulle curvature delle sezioni normali del paraboloide $T(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 3u^2+5v^2 \end{pmatrix}$, con $u, v \in \mathbf{R}$, in $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

5. Sul piano (x_2, x_3) in $\mathbf{R}^3$ disegnare una curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix}$ tale che:
   (a) la superficie ottenuta ruotando γ intorno all'asse x_3 abbia solo punti ellittici;
   (b) la superficie ottenuta ruotando γ intorno all'asse x_3 abbia solo punti iperbolici;
   (c) la superficie ottenuta ruotando γ intorno all'asse x_3 abbia sia punti ellittici che iperbolici.

6. Determinare equazioni di una curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix}$ tale che:
   (a) la superficie ottenuta ruotando γ intorno all'asse x_3 abbia solo punti ellittici;
   (b) la superficie ottenuta ruotando γ intorno all'asse x_3 abbia solo punti iperbolici;
   (c) la superficie ottenuta ruotando γ intorno all'asse x_3 abbia sia punti ellittici che iperbolici.
   In ognuno dei casi verificare analiticamente quanto affermato.

7. Sia $S = S(u,v)$ una superficie con curvatura gaussiana costante uguale a -1. Spiegare perché tutti i punti di S sono iperbolici.

8. Guardando le figure dell'iperboloide una una falda e dell'iperboloide a due falde discuterne il segno della curvatura gaussiana.

9. Sia dato l'ellissoide $\mathcal{E}$ di equazione $x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} = 1$. Consideriamo il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ di $\mathcal{E}$.
   (a) Chi sono le sezioni normali di $\mathcal{E}$ in P?
   (b) Verificare che P è un punto ellittico ma che le sezioni normali di $\mathcal{E}$ in P non hanno tutte la stessa curvatura in P.

10. Sia $F(\mathcal{P})$ l'immagine del paraboloide dell'esercizio 4 tramite l'isometria

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

    Determinare la curvatura gaussiana di $F(P)$ (Ragionare. Non c'è bisogno di calcoli).