Tutorato IX (20/05/2002)
(Prodotti infiniti e applicazioni)

Esercizio 1. (i) Mostrare che

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\ .$$

(Sugg.: Trovare un'espressione ricorsiva per $a_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$)

(ii) Dimostrare che per $|z|<1$, si ha:

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdot\ldots\cdot(1+z^{2^n})\ldots=\frac{1}{1-z}\ .$$

Sugg.: dimostrare che

$$\prod_{n=1}^{m}(1+z^{2^n})=\sum_{n=0}^{2^m-1}z^{2n}\ .$$

Esercizio 2. Mostrare che la funzione:

$$\theta(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+h^{2n-1}e^{z})(1+h^{2n-1}e^{-z})$$

con $|h|<1$, è una funzione intera e soddisfa l'equazione funzionale

$$\theta(z+2\log h)=h^{-1}e^{-z}\theta(z)\ .$$

Esercizio 3. (a) Applicare il teorema di Weierstrass [1] nel caso della funzione $f(z)=\sin\pi z$, lasciando, per ora, indeterminata la funzione $g(z)$.

[1] Ricordiamo il seguente risultato:

Teorema 1 (Weierstrass). *Fissata una successione $\{a_n\}_n\subset\mathbb{C}^*$ tale che $a_n\to\infty$, ed $m\in\mathbb{N}$, esiste una funzione intera il cui insieme degli zeri (esluso eventualmente l'origine), coincide esattamente con $\{a_n\}_n$, ed avente nell'origine uno zero di ordine m se $m>0$. Tale rappresentazione non è ovviamente unica; infatti, se f è una funzione intera con esattamente tali zeri, allora si può rappresentare nella forma:*

$$f(z)=z^m e^{g(z)}\prod_n\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}}\qquad(1)$$

(b) Usare il fatto che [2]

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \ ,$$

per ricavarsi la funzione $g(z)$.

(c) Dedurre dall'espressione ottenuta nei punti (a) e (b), il genere della funzione $\sin \pi z$, e la rappresentazione:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right) \ .$$

(d) Usare i risultati ottenuti, per calcolare il prodotto nel punto (i), dell'esercizio 1.

---

dove g è una funzione intera, e gli m_n sono certi interi.

La rappresentazione (**??**) diventa interessante quando possiamo scegliere gli m_n tutti uguali tra loro (in tal caso parleremo di *prodotti canonici*). Una condizione sufficiente affinché si possa fare ciò è l'esistenza di un intero non negativo k tale che:

$$\sum_n \frac{1}{|a_n|^{k+1}} < \infty \ .$$

Denotiamo con h il più piccolo di tali interi; allora h è detto *genere del prodotto canonico.* Inoltre, se in (**??**) (con l'hp che il prodotto sia canonico) $g(z)$ è un polinomio, allora la funzione f si dice di *genere finito*, ed il suo genere è proprio il massimo tra il grado di g e il genere del prodotto canonico.

[2] Per una dimostrazione di ciò si rimanda ad un qualsiasi testo di analisi complessa.