Tutorato VIII (13/05/2002)

(Proprietà locali di mappe olomorfe)

Esercizio 1. Quante radici possiedono i seguenti polinomi, nei domini di fianco indicati?

(a) $P_1(z) = z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1$, nel disco $|z| < 1$;

(b) $P_2(z) = z^4 - 6z + 3$, nell'anello $1 \leq |z| < 2$;

(c) $P_3(z) = z^4 + z^3 + 1$, nel quadrante $\{z = x + iy \mid x, y > 0\}$.

Esercizio 2. Sia $P(x)$ un polinomio con coefficienti reali e con coefficiente direttore 1. Supponiamo inoltre che $P(0) = -1$ e che $P(x)$ non abbia radici complesse nel cerchio unitario. Dimostrare che $P(1) = 0$.

(Sugg.: Per cominciare, dimostrate che se ho un polinomio monico

$$Q(z) = z^n + \ldots + a_0$$

allora il prodotto delle sue radici (considerate con molteplicità) è uguale a $(-1)^n a_0$.)

Esercizio 3. Sia f_n una successione di funzioni analitiche in Ω, con al più m zeri in Ω (contati con le relative molteplicità). Supponiamo che f_n converga uniformemente a f sui compatti di Ω; dimostrare che o f è identicamente nulla, oppure f ha al più m zeri in Ω (contati con molteplicità).

Esercizio 4. Sia f una funzione analitica in $z = 0$ tale che $f'(0) \neq 0$; dimostrare che per ogni n, esiste g analitica in un intorno di 0, tale che per ogni punto in tale intorno si abbia la rappresentazione:

$$f(z^n) = f(0) + g(z)^n \ .$$