Tutorato IV (25/03/2002)
(Proprietà di mappe olomorfe)

Esercizio 1. Dimostrare che una funzione intera con parte reale positiva, è costante.

Esercizio 2.
- Trovare f analitica su $\{|z| < 1\}$, e non identicamente nulla, tale che possieda un numero infinito di zeri.
- Sia f come sopra. Esiste g analitica in $|z| < R$ (con $R > 1$), tale che $f \equiv g$ su $\{|z| < 1\}$? (giustificare la risposta!)

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa e doppiamente periodica, allora f è costante. (Doppiamente periodica: per ogni $z \in \mathbb{C}$, si ha $f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2) = f(z)$, dove ω_1, $\omega_2 \in \mathbb{C}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$). [1]

Esercizio 4. Sia f analitica sul disco unitario aperto, con $|f(z)| < 1$ per $|z| < 1$; dimostrare che se f ha in 0 uno zero di ordine m, e $f(z) \neq \lambda z^m$ (con $|\lambda| = 1$), allora:

$$|f(z)| < |z|^m \qquad \forall\, |z| < 1\,.$$

Esercizio 5. Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica tc $|f(z) - 1| < 1$ per ogni $z \in \Omega$. Si dimostri che:

$$\int_\gamma \frac{f'}{f} = 0 \qquad \text{per ogni curva chiusa } \gamma \subset \Omega\,.$$

[1] Per la cronaca: una funzione con queste caratteristiche, si chiama *funzione ellittica*.

Suggerimenti:

Esercizio 1. Supporre che sia vero e cercare di giungere ad un assurdo usando il teorema di Liouville, i.e. trovare una funziond g intera, tale che $g \circ f$ è limitata... (Quale può essere questa g? dovete cercarla in modo che sia limitata in modulo quando la restringo al semipiano Re$z \geq 0$... non cercatela troppo complicata è molto "elementare")

Esercizio 2. Per il primo punto non vi do alcun suggerimento ! Per il secondo, ricordarsi che una successione in un compatto ammette almeno un punto di accumulazione...ed applicare quindi il teorema noto sugli zeri di una funzione olomorfa!

Esercizio 3. L'obiettivo è quello di applicare il teorema di Liouville... quindi dovete dimostrare che è limitata. Idee? Provare a far vedere che in realtà conoscere il comportamento della funzione in un particolare sottoinsieme del piano complesso, ci permette di ricavare i suoi valori in tutto $\mathbb{C}$... dedurre da ciò la conclusione!

Esercizio 4. Vi ricordate la dimostrazione del Lemma di Schwartz?... se sì, si tratta soltanto di adattarla a questo caso qui... Un aiuto ulteriore: considerate la funzione:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z^m} & \text{se } z \neq 0 \\ \frac{f^{(m)}(0)}{m!} & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5. Osservare che in $B_1(1)$ posso definire un ramo analitico di $\log z$... perchè?