Tutorato I (04/03/2002)

(Proprietà elementari numeri complessi e funzioni olomorfe)

Esercizio 1. Trovare i valori di:

1. $\mathrm{Im}\left\{(1+i)^n + (1-i)^n\right\}$;
2. $\mathrm{Re}\left\{(1+i)^n + (1-i)^n\right\}$;
3. i^i;
4. $(-1)^{2i}$;
5. $\sqrt[4]{i}$.

Esercizio 2. Trovare l'estremo superiore e inferiore delle seguenti funzioni, nel dominio D indicato:

1. $|\sin z|$ su $D = \mathbb{C}$;
2. $|\sin z|$ su $D = \{z \in \mathbb{C} : \quad |\mathrm{Im}\, z| < R\}$;
3. $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|$ su $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$;
4. $|e^{\frac{z-i}{z+i}}|$ su $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$.

Esercizio 3. Dimostrare che:

1. *$f(z)$ è analitica su Ω $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\overline{f(\overline{z})}$ è analitica su $\overline{\Omega}$.* [1]

2. *Una funzione analitica non costante, non può essere costante in modulo.*

3. *Una funzione analitica non costante, non può essere tale che $Re\, f = f$.*

4. *Una funzione analitica non costante, non può essere tale che $Im\, f = f$.*

Esercizio 4. Trovare il più generale polinomio armonico della forma:

$$P(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \ .$$

Determinare, inoltre, la funzione armonica coniugata e la corrispondente funzione analitica.

[1] Abbiamo definito $\overline{\Omega} \equiv \{\overline{z} : \quad z \in \Omega\}$