Tutorato IX (20/05/2002)
(Prodotti infiniti e applicazioni)

Esercizio 1. (i) Osserviamo che $a_2 = \frac{3}{4}$, mentre se $n \geq 3$, abbiamo:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) a_{n-1} = \frac{n^2-1}{n^2} a_{n-1} = \frac{(n+1)(n-1)}{n} a_{n-1} = \\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} \frac{n(n-2)}{(n-1)^2} a_{n-2} = \ldots = \frac{n+1}{n} \frac{4}{3} a_3 = \\ &= \frac{n+1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \,. \end{aligned}$$

(ii) Il suggerimento si dimostra per induzione. Vediamo come utilizzarlo:

$$\begin{aligned} (1+z)\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{2^n}) &= (1+z)\lim_{m\to\infty}(1+z^{2^n}) = (1+z)\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{2^m-1} z^{2n} = \\ &= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{2^m-1} z^{2n}+z^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \,. \end{aligned}$$

Esercizio 2. Per dimostrare che θ è una funzione analitica su tutto $\mathbb{C}$, è sufficiente dimostrare che tale prodotto converge uniformememte su ogni compatto di $\mathbb{C}$; per far ciò, mostriamo che la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |h^{2n-1}e^z + h^{2n-1}e^{-z} + h^{4n-2}|$$

converge totalmente sui dischi $D_R(0)$, per ogni $R > 0$. Infatti, se $|z| \leq R$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |h^{2n-1}e^z + h^{2n-1}e^{-z} + h^{4n-2}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |h|^{2n-1}(2e^R+1) \leq C\sum_{n=1}^{\infty} |h|^n < \infty \,.$$

Con un conto diretto, si fa vedere che soddisfa anche l'equazione funzionale; infatti:

$$\begin{aligned} h^{-1}e^{-z}\theta(z) &= h^{-1}e^{-z}\prod_{n\geq 1}(1+h^{2n-1}e^z)(1+h^{2n-1}e^{-z}) = \\ &= h^{-1}e^{-z}(1+he^z)(1+he^{-z})\prod_{n\geq 2}(1+h^{2n-1}e^z)(1+h^{2n-1}e^{-z}) = \\ &= (1+h^{-1}e^{-z})(1+he^z)\prod_{n\geq 2}(1+h^{2n-1}e^z)(1+h^{2n-1}e^{-z}) = \\ &= (1+h^{-1}e^{-z})\prod_{n\geq 2}(1+h^{2n-1}e^{-z})(1+he^z)\prod_{n\geq 2}(1+h^{2n-1}e^z) = \end{aligned}$$

facendo il cambio di indici: $n = m-1$ (nel primo prodotto) e $n = m+1$ (nel secondo prodotto):

$$\begin{aligned} h^{-1}e^{-z}\theta(z) &= \ldots = \prod_{m\geq 1}(1+h^{2m-3}e^{-z})\prod_{m\geq 1}(1+h^{2m+1}e^{z}) = \\ &= \prod_{m\geq 1}(1+h^{2m-3}e^{-z})(1+h^{2m+1}e^{z}) = \theta(z+\log h^2)\ . \end{aligned}$$

Esercizio 3. (a) Osserviamo che tale funzione ha zeri (semplici) in $z = \pm n$; poiché $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge, mentre $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge, dobbiamo prendere $h = 1$ (genere del prodotto canonico), ottenendo quindi la rappresentazione:

$$\sin \pi z = z e^{g(z)} \prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}$$

con g funzione intera da determinare.

(b) Facciamo la derivata logaritmica dell'uguaglianza sopra ottenuta ottenendo:

$$\pi \cot \pi z = \frac{d(\sin \pi z)}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)\ ;$$

confrontando tale espressione con quella menzionata nel testo dell'esercizio, otteniamo che $g'(z) = 0$ e quindi $g(z) \equiv c$. Poichè il limite

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin \pi z}{z} = \pi$$

si ottiene facilmente che $e^{g(z)} = e^c = \pi$. Quindi abbiamo ottenuto la seguente rappresentazione :

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}$$

(c) Dall'espressione sopra, si vede subito che la funzione è di genere 1; inoltre, mettendo insieme i fattori di indice n e $-n$, otteniamo:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\ .$$

(d) Basta osservare:

$$\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{z\to 1}\frac{\sin \pi z}{\pi z(1-z)(1+z)} = $$
$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{\sin \pi(1-z)}{\pi(1-z)} = \frac{1}{2}\ .$$