Tutorato VI (29/04/2002)
(Residui e applicazioni)

Esercizio 1. Ricordiamo che per *Residuo* di una funzione f in z_0, intendiamo il coefficiente a_{-1} dello sviluppo in serie di Laurent con centro in z_0. (Chiaramente se f è analitica in z_0 il suo residuo in tale punto è 0)

1. Sia f una funzione meromorfa con polo in z_0 di ordine $h > 0$. Vogliamo trovare il coefficiente a_{-1} del suo sviluppo in serie di Laurent in z_0. Osserviamo che per le condizioni date, si ha che la funzione $(z-z_0)^h f(z)$ è analitica in z_0 e il coefficiente b_{h-1} del suo sviluppo di Taylor in z_0 coincide proprio con a_{-1} che stiamo cercando; quindi:
$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(h-1)!} D_z^{(h-1)}[(z-z_0)^h f(z)]_{|z=z_0} \ .$$

2. Se f è analitica in z_0 e g ha un polo semplice in tale punto, consideriamo lo sviluppo in serie di Laurent del prodotto:
$$\begin{aligned} fg &= (a_0 + O(z)) \cdot (b_{-1}(z-z_0)^{-1} + b_0 + O(z)) = \\ &= \frac{a_0}{b_{-1}}(z-z_0)^{-1} + a_0 b_0 + a_1 b_{-1} + O(z) \ . \end{aligned}$$
Quindi ricordandoci la definizione di residuo:
$$\mathrm{Res}_{z_0} fg = a_0 b_{-1} = f(z_0)\mathrm{Res}_{z_0} g \ .$$

Esercizio 2. Soluzione:

- (a)
La funzione ha poli semplici in $z = -2, -3$; infatti:
$$\frac{1}{z^2+5z+6} = \frac{1}{(z+2)(z+3)} = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3} \ .$$
Quindi $\mathrm{Res}_{-2} = 1$ e $\mathrm{Res}_{-3} = -1$.

- (b)
La funzione ha due poli di ordine 2 in $z = -1, 1$. I relativi residui sono: $\mathrm{Res}_{-1} = \frac{1}{4}$ e $\mathrm{Res}_{1} = -\frac{1}{4}$.

- (c)
Questa funzione ha poli in ogni multiplo intero di π: quindi tutti e soli i poli (semplici) sono della forma $z = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. D'altro canto la funzione è periodica di pediodo 2π sull'asse reale, e quindi sarà sufficiente calcolare il residuo in 0 e π.
Per il residuo in 0:
$$\frac{1}{\sin z} = \frac{z}{\sin z} \cdot \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Res}_0 = 1$$
dove nell'ultimo passaggio ho usato l'esercizio 1.
Per il residuo in π:
$$\frac{1}{\sin z} = \frac{-1}{\sin(z-\pi)} = \frac{-(z-\pi)}{\sin(z-\pi)} \cdot \frac{1}{(z-\pi)}$$
quindi procedendo come sopra:
$$\mathrm{Res}_\pi = -1 \ .$$
Riassumendo: $\mathrm{Res}_{\mathrm{k}\pi} = (-1)^{\mathrm{k}}$.

- (d)
Usando l'esercizio 1 e il punto (c), otteniamo che:
$$\mathrm{Res}_{\mathrm{k}\pi} = \cos(\mathrm{k}\pi) \cdot (-1)^{\mathrm{k}} = 1 \ .$$

- (e)
Questa funzione ha poli in ogni multiplo intero di π e tali poli sono di ordine 2. Inoltre essendo periodica di periodo π sull'asse reale, è sufficiente calcolare il residuo in $z = 0$:
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 z} &= \frac{1}{\left(z - \frac{z^3}{6} + O(z^5)\right)^2} = \\ &= \frac{1}{z^2\left(1 - \frac{z^2}{6} + O(z^4)\right)^2} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3} + O(z^4)} = \\ &= \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{z^2}{3} + O(z^4)\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3} + O(z^2) \ . \end{aligned}$$
Quindi $\mathrm{Res}_0 = 0$, da cui segue (per periodicità) che $\mathrm{Res}_{\mathrm{k}\pi} = 0$.