Tutorato V (22/04/2002)

(Trasformazioni lineari fratte e mappe conformi)

Esercizio 1. 1. E' noto che una TLF viene individuata completamente dal valore che assume su tre punti distinti del piano complesso. Sia:

$$\zeta(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

la nostra TLF che manda l'asse reale in se stesso; consideriamo ora la sua inversa, che sarà data da:

$$\zeta^{-1}(w) = \frac{dw-b}{a-cw}$$

e continuerà a mandare l'asse reale nell'asse reale!
Calcoliamo ora le due TLF in zero:

$$z(0) = \frac{b}{d} \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \zeta^{-1}(0) = \frac{-b}{a} \in \mathbb{R}\ .$$

Distinguiamo ora due casi (è sempre possibile ricondursi ad uno di questi due casi, moltiplicando numeratore e denominatori, per un opportuno coefficiente):

(a) Se b, $d \in \mathbb{R}$ allora anche $a \in \mathbb{R}$; quindi calcolando $\zeta(1) = \frac{a+b}{c+d} \in \mathbb{R}$ segue che anche $c \in \mathbb{R}$;

(b) Se b, $d \in i\mathbb{R}$ e di conseguenza $a \in i\mathbb{R}$. Moltiplicando numeratore e denominatore di ζ per i (tanto la TLF rimane la stessa: è definita come classe d'equivalenza) mi riconduco al caso precedente, e quindi posso concludere che anche in questo caso esiste una sua rappresentazione con coefficieni reali.

2. Ricordiamo che due TLF che coincidono su tre punti coincidono dappertutto. Premesso ciò, supponiamo che la coniugazione sia una TLF ed osserviamo che coincide con l'identità su tutto l'asse reale; poichè l'identità è una TLF allora avrei trovato due TLF che coincidono su tre punti (in realtà su molti di più) ma che sono diverse!!! (ASSURDO!)

Esercizio 2. In tutti questi esercizi, il trucco consisterà nel trovare l'immagine di due o tre punti (infatti le TLF richieste non sono uniche in molti casi) e costruirsi la TLF associata; riassumiamo brevemente le proprietà delle TLF che useremo:

- Una TLF è univocamente determinata da tre punti. (Due punti non me la determinano univocamente ma a meno di omotetie e rotazioni)
- Una TLF manda la classe (cerchi, rette) nella classe (cerchi, rette) .. ossia può mandare cerchi in cerchi, rette in cerchi, rette in rette oppure cerchi in rette; in particolare:
  - un cerchio andrà in una retta, solo se un suo punto viene mandato all'infinito;
  - una retta viene mandato in un cerchio se ogni suo punto viene mandato in un punto finito e il limite delle TLF all'infinito è finito;
- una TLF rispetta le simmetrie: punti simmetrici rispetto una retta (o un cerchio) vengono mandati in punti simmetrici rispetto l'immagine della retta (o del cerchio)... che sarà ancora una retta o un cerchio; in particolare, per simmetrico di un punto z rispetto ad un cerchio di raggio R e centro a, intendiamo un punto z^* che soddisfa la relazione $(z^* - a)(\overline{z} - \overline{a}) = R^2$. Osserviamo quindi che il simmetrico del centro è il punto all'infinito;
- una TLF conserva gli angoli (è una mappa conforme) e l'orientamento (cioè se prima percorrendo la curva avevo il dominio da un lato (destra o sinistra), l'immagine della curva sarà orientata in modo da avere l'immagine del dominio dallo stesso lato!).

Troviamo ora le trasformazioni richieste:

1. Basta imporre che:
$$z_0 \to 0 \qquad \overline{z_0} \to \infty\ ;$$
questa non me la determina univocamente: mi manda la retta reale in una circonferenza di centro 0 ma raggio a priori qualsiasi; quindi bisogna imporre che un qualsiasi punto dell'asse rele vada in un punto di modulo 1: ad esempio che il punto all'infinito vada in 1 (cioè che il limite della trasformazione sia 1; quindi otteniamo:
$$\zeta(z) = \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}\ .$$

2. Mandiamo:
$$-2 \to 0 \qquad 0 \to i$$

e per concludere impongo che il punto all'infinito (è il simmetrico di 0 rispetto al primo cerchio), vada nel simmetrico di i rispetto al secondo cerchio, che è dato da (basta applicare la formuletta sopra) $\frac{-1+i}{2}$; otteniamo:

$$\zeta(z) = \frac{i+i}{2} \cdot \frac{z+2}{2z+(1-i)} \ .$$

3. Per brevità chiamiamo C_1 il cerchio più piccolo e C_2 quell'altro. Supponiamo che i due cerchi concentrici finali abbiano centro nell'origine. Sia p il punto la cui immagine è 0 (ossia il centro) Quindi il suo simmetrico rispetto a C_1 (e C_2) deve andare in ∞ (poichè c'è un solo punto che va all'infinito, questi due punti dovranno necessariamente coincidere); imponiamo quindi le seguenti condizioni per trovare p:

$$\begin{cases} (p^* - \frac{1}{4})(\overline{p} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{16} \\ p^*\overline{p} = 1 \end{cases}$$

che ci fornisce (una volta risolto) $p = 2+\sqrt{3}$; quindi dobbiamo imporre:

$$2+\sqrt{3} \to 0 \qquad \frac{1}{2+\sqrt{3}} \to \infty \qquad 1 \to 1$$

dove l'ultima condizione è stata scelta arbitrariamente (se ne possono fare altre che vanno ancora benissimo!); otteniamo quindi:

$$\zeta(z) = \frac{(2+\sqrt{3})-z}{(2+\sqrt{3})z-1}.$$

4. Mandiamo:

$$1 \to \infty \qquad 0 \to 0 \qquad -1 \to 1$$

ed otteniamo:

$$\zeta(z) = \frac{2z}{z-1} \ .$$

Questa TLF mappa il mio dominio nella striscia $\{0 < \mathrm{Re} z < 1\}$. Quindi per mandarla nel semipiano superiore, basterà comporla con la funzion $e^{i\pi w}$, da cui otteniamo che la trasformazione cercata è:

$$f(z) = e^{i\pi\zeta(z)} = e^{\frac{2\pi i z}{z-1}} \ .$$

Esercizio 3. Osserviamo che l'asse reale viene mandato nell'asse reale (vedi es 1.1) e quindi verrà conservata la simmetria rispetto asse reale (vedi es.2). Vediamo dove viene mandato l'asse immaginario:

$$0 \to -1 \qquad i \to -i \qquad -i \to i$$

quindi viene mandato nella circonferenza unitaria di centro l'origine; in particolare, poichè 1 è l'unico punto che va all'infinito, segue che per $c \neq 1$, tutte queste retta vanno in una circonferenza.
Per $c = 1$ la retta in questione, viene mandata in se stessa; infatti: se z=1+iy allora

$$R(z) = \frac{2+iy}{iy} = 1 + \frac{2}{iy} \, .$$

Quindi, poichè le TLF conservano la simmetria, avremo che le immagini delle rette con $c = 1+\epsilon$ e $c = 1-\epsilon$ avranno immagini simmetriche rispetto l'asse Re$z = 1$. Quindi è sufficiente studiare cosa succede per $c < 1$:

1. Sappiamo già che l'immagine è una circonferenza, dobbiamo determinarne il centro; per la simmetria rispetto asse reale, sappiamo che il centro deve stare su asse reale;

2. Ogni retta contiene in punto ∞ che viene mandato in 1; d'altro canto ciascuna retta ha un altro punto immagine su asse reale: $\frac{c+1}{c-1}$; quindi il centro è il punto intermedio a questi due, cioè $\frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{c-1}+1\right)$.

3. Il raggio di queste circonferenze è $\frac{1}{2}\left(1-\frac{c+1}{c-1}\right)$, ed osserviamo che quando $c \to \infty$ anche questo tende a zero, mentre quando $c \to 1$ questo tende a infinito (cioè tende a diventare la retta Re$z = 1$).

Per simmetria si ottengono le immagini delle rette per $c > 1$. Conclusione:

1. se $c = 1$: l'immagine è la retta Re$z = 1$;

2. se $c < 1$: l'immagine è una circonferenza di centro $P_c = \frac{1}{2}\left(1+\frac{c+1}{c-1}\right)$ e raggio $R_c = \frac{1}{2}\left(1-\frac{c+1}{c-1}\right)$;

3. se $c > 1$: l'immagine è una circonferenza di centro $P_c = \frac{1}{2}\left(1+\frac{c+1}{c-1}\right)$ e raggio $R_c = \frac{1}{2}\left(\frac{c+1}{c-1}-1\right)$.

Esercizio 4. (Premessa: molto probabilmente c'è da aggiungere qualche ipotesi sulla regolarità di f, altrimenti ci sono dei problemi... se ho tempo e le trovo, correggo questa versione "provvisoria" della soluzione)

Sia z_0 un punto tale che $\mathrm{Imz}_0 > 0$; consideriamo la trasformazione che mi mappa il mio dominio nel cerchio unitario mandando z_0 nell'origine: (vedi es.2.1)

$$\zeta(z) = \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}$$

e consideriamo la funzione $g = f \circ \zeta^{-1} : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{C}$ e analitica su tale dominio: infatti l'unico eventuale problema è in $z = 1$, cioè nell'immagine dell'infinito.. si dimostra che per le ipotesi fatte la funzione ha in tale punto una singolarità eliminabile.
Quindi posso applicare a g la formula di Cauchy su dischi:

$$g(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{g(\xi)}{\xi} \, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{f \circ \zeta^{-1}(\xi)}{\xi} \, d\xi \ .$$

Osserviamo ora che $g(0) = f(z_0)$ e facciamo il seguente cambio di coordinate nell'integrale:

$$z = \zeta^{-1}\xi \qquad \to \qquad \xi = \zeta(z)$$

e di conseguenza:

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \, dz = \frac{z_0 - \overline{z_0}}{(z - \overline{z_0})(z - z_0)} \ .$$

Sostituenso sopra otteniamo:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} f(z) \frac{z_0 - \overline{z_0}}{(z - \overline{z_0})(z - z_0)} \, dz = \\ &= \frac{\mathrm{Imz}_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+infty} \frac{f(z)}{|z - z_0|^2} \, dz \ . \end{aligned}$$