Tutorato IV (25/03/2002)
(Proprietà di mappe olomorfe)

Esercizio 1. Supponiamo per assurdo che esista f funzione intera (non costante), tale che $\text{Re}z \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$; consideriamo la funzione:

$$g(z) = e^{-f(z)}.$$

E' ovvio che g sia analitica in tutto $\mathbb{C}$ (cioè è intera); inoltre $|g(z)| = e^{-\text{Re}f(z)} \leq 1$ per le hp fatte! Quindi ho trovato una funzione intera non costante (in quanto f non lo era) che è limitata in modulo... questo contraddice il teorema di Liouville!

Esercizio 2.

- Considerare ad esempio la funzione $f(z) = \sin \frac{1}{1-z}$. (Verificate!).
- Sia f come sopra e supponiamo che esista una funzione g come nelle hp dell'esercizio; tale funzione è chiaramente analitica in $|z| \leq 1$, ma in tale insieme ha infiniti zeri, che si accumulano in almeno un punto del dominio (ho una successione in un compatto... quindi possiede almeno un punto di accumulazione!). Dalle proprietà degli zeri di una funzione olomorfa, segue che $g \equiv 0$ su $\{|z| \leq 1\}$... ma su tale insieme g coincide con f... Assurdo!

Esercizio 3. Dalla doppia periodicità della funzione f, segue che è sufficiente conoscere i valori della funzione nel dominio $R = \{a\omega_1 + b\omega_2 : \quad 0 \leq a, b \leq 1\}$; infatti per ogni $z \in \mathbb{C}$, me lo posso scrivere come $z = r + n\omega_1 + m\omega_2$, dove $r \in R$ (verificatelo!). Usando la doppia periodicità della f, posso concludere che $f(z) = f(r)$, da cui:

$$\sup_{\mathbb{C}} |f(z)| = \sup_R |f(r)| < \infty$$

in quanto R è un compatto e $|f|$ è continua (in quanto f è olomorfa), quindi dal teorema di Weierstrass segue la conclusione di sopra.
Quindi ho che f è una funzione intera e limitata in modulo: dal teorema di Liouville segue che f è costante!

Esercizio 4. Consideriamo la funzione:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z^m} & \text{se } z \neq 0 \\ \frac{f^{(m)}(0)}{m!} & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

Si dimostra che g è una funzione olomorfa su $\{|z| < 1\}$ (Cfr. D.Sarason "Note on Complex function theory" , VII.13). Per $0 < r < 1$ la funzione g è limitata in modulo da $\frac{1}{r^m}$ nel disco $|z| \leq r$ (segue dal principio del massimo modulo). Mandando al limite per $r \to 1^-$, otteniamo che $|g| < 1$ per $|z| < 1$, e quindi (dalla def di g):

$$|f(z)| < |z|^m$$

che è la tesi.
(Oss.: Per dimostrare che tale disuguaglianza è stretta, applicare il principio del massimo alla funzione g sopra definita...)

Esercizio 5. Dalle ipotesi dell'esercizio, sappiamo che f mappa Ω in $B_1(1) = \{|z-1| < 1\}$; in tale insiema posso definire un ramo analitico del logaritmo, che indicheremo $\log_* z$ (questo è vero in quanto tale dominio non contiene alcun cammino che gira intorno all'origine... provare a determinare esplicitamente tale ramo analitico!) Quindi:

$$\int_\gamma \frac{f'}{f} = \int_\gamma \frac{d}{dz}(\log_* z)\, dz = 0$$

come segue immediatamente...