Tutorato III (18/03/2002)
(Integrali complessi)

Esercizio 1. 1. $\int_{\sigma(0,1+i)} x\,dz = \frac{1+i}{2}$.

2. $\int_{|z|=R} x\,dz = i\pi R^2$.

3. Osserviamo che:

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\left(\int_{|z|=2} \frac{dz}{z-1} + \int_{|z|=2} \frac{dz}{z+1}\right) ;$$

applicando la formula di Cauchy su dischi, segue immediatamente che tale integrale è nullo.

4. - Se $n \leq 0$, tale integrale è uguale a zero, come segue immediatamente dal teorema di Cauchy su dischi;
   - Se $n > 0$: applichiamo la formula di Cauchy su dishi; derivando $(n-1)$ volte entrambi i membri, otteniamo:

   $$f^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(\zeta}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta \,,$$

   che applicato al nostro integrale ci fornisce:

   $$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \,.$$

5. Si procede esattamente come in (3) e segue che $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} = 0$.

6. Si Procede analogamente a (3) e (5), usando un trucco analogo a quello suggerito nell'integrale (2); otteniamo che:

$$\frac{1}{|z-a|^2} = \frac{1}{\rho^2 - |a|^2}\left(\frac{a}{z-a} + \frac{\rho^2}{\rho^2 - \overline{a}z}\right)$$

e facendo i conti troviamo:

   - Se $|a| < \rho$ il risultato è : $\frac{2\pi i a}{|\rho^2 - |a|^2|}$;
   - Se $|a| > \rho$ il risultato è : $\frac{2\pi i \rho^2}{\overline{a}|\rho^2 - |a|^2|}$.

7. Procedendo esattamente come in (4), otteniamo:

- Se $n \leq 0$, allora $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^n} dz = 0$;
- Se $n > 0$ e n pari, allora $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^n} dz = 0$;
- Se $n > 0$ e $n \equiv 1$ (mod.4), allora $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}$;
- Se $n > 0$ e $n \equiv 3$ (mod.4), allora $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^n} dz = -\frac{2\pi i}{(n-1)!}$.

8. Distinguiamo vari casi: [1]

   - Se $n \geq 0$ e $m \geq 0$, allora $\int_{|z|=2} z^n (1-z)^m \, dz = 0$;
   - Se $n \geq 0$ e $m < 0$, allora $\int_{|z|=2} z^n (1-z)^m \, dz = 2\pi i (-1)^m \begin{pmatrix} n \\ |m|-1 \end{pmatrix}$;
   - Se $n < 0$ e $m \geq 0$, allora $\int_{|z|=2} z^n (1-z)^m \, dz = 2\pi i (-1)^{n+1} \begin{pmatrix} m \\ |n|-1 \end{pmatrix}$;
   - Se $n < 0$ e $m < 0$, allora [2]

   $$\int_{|z|=2} z^n (1-z)^m \, dz = 2\pi i \left\{ \begin{pmatrix} |m|+|n|-2 \\ |n|-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |m|+|n|-2 \\ |m|-1 \end{pmatrix} \right\}$$

   .

Esercizio 2. 1. Sia z tc $|z| \leq \rho$ e sia $\delta = R - \rho > 0$; per le ipotesi fatte, sappiamo che $\overline{B_\delta(z)} \subset \overline{B_R(0)}$, che è interno al dominio di analiticità della f. Come già notato nell'esercizio precedente, dalla formula di Cauchy su dischi, segue la seguente rappresentazione delle derivate della f:

$$f^n(\gamma) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_\delta(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

per ogni $|\gamma - z| < \delta$. Quindi:

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z)| &\leq \frac{n!M}{2\pi} \int_{\partial B_\delta(z)} \frac{1}{\delta^{n+1}} \\ &= \frac{n!M}{2\delta^{n+1}\pi} |\partial B_\delta(z)| = n!M\delta^{-n} = n!M(R-\rho)^{-n} \end{aligned}$$

[1] E' molto probabile che ci sia qualche errore! Se ne trovate qualcuno fatemelo sapere...

[2] Suggerimento: Non fare l'integrale sulla circonferenza! usa due cammini, ottenuti unendo alla circonferenza il segmento $x = \frac{1}{2}$; questi avranno in comune tale segmento (percorso in versi opposti) e ciascuno conterrà nella propria regione interna una sola singolarità! in questo modo, a ciascuno dei due integrali ottenuti, si può applicare la Formula di Cauchy

e quindi

$$\sup_{B_\rho(0)} |f^{(n)}(z)| \le n! M (R-\rho)^{-n} \ .$$

2. Se per assurdo ciò fosse vero, allora prendendo un δ sufficientemente piccolo in modo che $\overline{B_\delta(z)} \subset \Omega$ (dove con Ω intendo il dominio di analiticità della f), e applicando le stime di Cauchy precedenti, otterrei:

$$n! n^n \le |f^{(n)}(z)| \sup_{B_\delta(z)} |f(\zeta)| n! \delta^{-n} \ ,$$

da cui:

$$\sup_{B_\delta(z)} |f(\zeta)| \ge n^n \delta^n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

che è assurdo, in quanto $|f|$ è continua su $\overline{B_\delta(z)}$ (compatto!) e quindi per il teorema di Weierstrass è ivi limitata!