Tutorato II (11/03/2002)
(Serie di Potenze)

Esercizio 1. 1.

$$\begin{aligned}\frac{2z+3}{z+1} &= \frac{2(z-1)+5}{(z-1)+2} = \frac{1}{2}\frac{2(z-1)+5}{1+\frac{z-1}{2}} = \\ &= ((z-1)+\frac{5}{2})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n = \ldots = \\ &= \frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n \ ;\end{aligned}$$

2. Utilizzeremo i teoremi di differenziazione per Serie, applicati alla serie geometrica (si verifica facilmente che sono soddisfatte tutte le hp); cominciamo con l'osservare il seguente risultato elementare:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n \qquad \text{per } |z| < 1 \ .$$

Quindi, differenziando $(m-1)$ volte, otteniamo (per $|z| < 1$):

$$\begin{aligned} D^{m-1}\left(\frac{1}{1-z}\right) &= \frac{(m-1)!}{(z-1)^m} \\ D^{m-1}\left(\sum_{n\geq 0} z^n\right) &= \sum_{n\geq m-1} z^{n-(m-1)} n(n-1)\ldots(n-(m-2)) \ . \end{aligned}$$

Mettendo insieme le due uguaglianze, otteniamo:

$$\frac{1}{(1-z)^m} = \sum_{n\geq 0} z^n \begin{pmatrix} n+m-1 \\ m-1 \end{pmatrix} \ .$$

Esercizio 2. I Raggi di convergenza delle serie assegnate sono:

1. $R = \infty$;
2. $R = 0$;
3. $R = 1$;

4. $R = 1$;

5. $R = 1$.

Esercizio 3. 1. E' una serie di potenza, il cui disco di convergenza è dato da:

$$\Delta = \{|z+i| < \sqrt{2}\};$$

In tale disco converge alla funzione $f(z) = \frac{1}{1-z}$.

2. La serie converge totalmente (e quindi uniformemente e puntualmente) per $|z| \leq 1$. La serie non converge per $|z| > 1$ (non è soddisfatta la condizione necessaria di Cauchy).

3. La serie converge totalmente (e quindi uniformemente e puntualmente) per $|z| \leq 1$. La serie non converge per $|z| > 1$ (non è soddisfatta la condizione necessaria di Cauchy).

Esercizio 4. Dalla definizione di Raggio di convergenza, si verifica quasi immediatamente che:

- La prima serie ha raggio di convergenza R^2 (dove se $R = \infty$, si ha che $R^2 = \infty$);
- La seconda serie ha raggio di convergenza $\sqrt{R}$;
- La terza serie (mettendo insieme i due risultati precedenti), ha raggio di convergenza R.