Tutorato I (04/03/2002)

(Proprietà elementari numeri complessi e funzioni olomorfe)

Esercizio 1. 1. Ossserviamo che :

$$\begin{aligned}(1+i)^n+(1-i)^n &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} i^j+\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-i)^j = \\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} i^j(1+(-1)^j) = 2\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2j} i^{2j} = \\ &= 2\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2j}(-1)^j.\end{aligned}$$

Quindi $\gamma=(1+i)^n+(1-i)^n \in \mathbb{R}$, e quindi $\operatorname{Im}\gamma=0$.

2. Da quanto detto sopra segue che:

$$\operatorname{Re}\{(1+i)^n+(1-i)^n\}=2\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2j}(-1)^j.$$

3.

$$\begin{aligned} i^i &= e^{i\log i}=\{e^{-(\frac{\pi}{2}+2\pi n)}: \quad n\in\mathbb{Z}\} = \\ &= \{e^{-\frac{(2n+1)\pi}{2}}: \quad n\in\mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} (-1)^{2i} &= e^{2i\log(-1)}=\{e^{-2(\pi+2\pi n)}: \quad n\in\mathbb{Z}\} = \\ &= \{e^{-2(2n+1)\pi}: \quad n\in\mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Osserviamo che $(-1)^{2i}\subset((-1)^2)^i$.

5.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{i} &= \{e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})}, \quad k=0,1,2,3\} = \\ &= \{e^{i\frac{\pi}{8}},\ e^{i\frac{5\pi}{8}},\ e^{i\frac{9\pi}{8}},\ e^{i\frac{13\pi}{8}}\}.\end{aligned}$$

Esercizio 2. Soluzione:

1.
   - $\inf |\sin z| = 0$: ovvio!
   - $\sup |\sin z| = +\infty$: infatti $|\sin(in)| = |\sinh(-n)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$;
2.
   - $\inf_D |\sin z| = 0$: ovvio!
   - $\sup_D |\sin z| = \cosh R$: infatti basta osservare che
     $$|\sin(x+iy)|^2 = \cosh^2 y - \cos^2 x$$
     e si vede che il sup viene assunto per $z \to \frac{\pi}{2} + iR$.
3.
   - $\inf_D \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 0$: ovvio prendo $z = i$!
   - $\sup_D \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1$: infatti si dimostra che questa funzione mappa tale semipiano nel cerchio unitario $\{|z| < 1\}$.
4. Per quanto detto nel punto precedente, si ha che :
   - $\inf_D |e^{\frac{z-i}{z+i}}| = e^{-1}$
   - $\sup_D |e^{\frac{z-i}{z+i}}| = e$.

Esercizio 3. 1. E' sufficiente dimostrare che f analitica in $\Omega \Rightarrow \overline{f}(z) := \overline{f(\overline{z})}$ è analitica in $\overline{\Omega}$. Infatti, una volta dimostrato ciò, l'altra implicazione segue immediatamente osservando che $\overline{\overline{f}} = f$. Dimostriamo quindi che $\overline{f}$ è analitica in $z_0 \in \overline{\Omega}$;

$$\begin{aligned}
& \lim_{w\to 0} \frac{\overline{f}(z_0+w) - \overline{f}(z_0)}{w} = && (1)\\
= \ & \lim_{w\to 0} \frac{\overline{f(\overline{z_0+w})} - \overline{f(\overline{z}_0)}}{w} = && (2)\\
= \ & \overline{\lim_{w\to 0} \frac{f(\overline{z_0}+\overline{w}) - f(\overline{z}_0)}{\overline{w}}} = && (3)\\
= \ & \overline{f'(\overline{z}_0)} && (4)
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che f è analitica in $\overline{z}_0$.

2. Supponiamo che $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sia una funzione analitica in Ω, tale che $|f|^2 = u^2 + v^2 \equiv C$. Quindi derivando l'espressione sopra, otteniamo:

$$\begin{cases} \partial_x(u^2+v^2) = 0 \\ \partial_y(u^2+v^2) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} uu_x + vv_x = 0 \\ uu_y + vv_y = 0 \end{cases}$$

Applicando le equazioni di Cauchy Riemann, e sostituendo sopra, otteniamo:

$$\begin{cases} uu_x - vu_y = 0 \\ uu_y + vu_x = 0 \end{cases}$$

da cui, moltiplicando le due espressioni otteniamo:

$$(u^2 + v^2)(u_x^2 + u_y^2) = C(u_x^2 + u_y^2) = 0.$$

Distinguiamo ora due casi:

(a) Se $C = 0$, allora $f(z) \equiv 0$ e quindi è costante!

(b) Se $C \neq 0$, allora $u_x^2 + u_y^2 = 0$ e quindi $u_x = u_y = 0$ da cui segue che u è costante; d'altra parte utilizzando le equazioni di C.R. otteniamo che $v_x = v_y = 0$ e cioè anche v è costante.

3. Se $\operatorname{Re} f = f$, allora $v(x,y) \equiv 0$ e quindi $v_x = v_y = 0$; applicando Cauchy Riemann si ha che anche $u_x = u_y = 0$ e quindi anche u è costante.

4. Si procede in maniera speculare a quanto fatto sopra.

Esercizio 4. Imponendo la condizione $\Delta P(x,y) = 0$, si ottengono le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} c = -3a \\ b = -3d \end{cases}$$

e quindi P è della forma:

$$P(x,y) = ax^3 - 3dx^2y - 3axy^2 + dy^3 \ .$$

Risolviamo ora il secondo problema; dalle equazioni di Cauchy-Riemann si ha:

$$\begin{cases} v_y = P_x \\ v_x = -P_y \end{cases}$$

e tramite integrazione diretta si ottiene:

$$v(x,y) = dx^3 + 3ax^2y - 3dxy^2 - ay^3 + cost.$$

Quindi la funzione analitica corrispondente è:

$$f(z) = f(x+iy) = (a+id)z^3 + i\,cost.$$