1. Determinare l'anello di convergenza delle serie di Laurent

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} a^{n^2} z^n, \quad |a|<1, \qquad \sum_{n\in\mathbf{Z}} a^n z^n, \quad a\neq 0, \qquad \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{z^n}{|n|!}, \qquad \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{(z-3)^{2n}}{(n^2+1)^n}.$$

2. Sia $f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}$, $\quad 0<|a|<|b|$.
   (i) Determinare le 3 serie di Laurent di f centrate in zero: su $\Delta(0,|a|)$, su $A_{|a|,|b|}(0)$ e su $A_{|b|,+\infty}(0)$.
   (ii) Determinare le 2 serie di Laurent di f centrate in $z=a$: su $A_{0,|a-b|}(a)$ e su $A_{|a-b|,+\infty}(a)$.

3. Sia $f(z)=\frac{z^2}{z^2+1}$.
   (i) Determinare la serie di Laurent di f intorno a $z=i$.
   (ii) Determinare il tipo di singolarità di f all'infinito.

4. Sia $f(z)=\frac{z}{z-1}$.
   (i) Determinare le serie di Laurent di f centrate in $z=1$.
   (ii) Determinare il tipo di singolarità di f all'infinito.

5. Sia $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}+\frac{1}{(z-3)}$.
   (i) Determinare la serie di Laurent di f intorno a $z=0$.
   (ii) Determinare la serie di Laurent di f intorno a $z=1$.
   (iii) Determinare il tipo di singolarità di f all'infinito.

6. Sia f una funzione olomorfa sull'insieme $\Delta(0,r)\setminus\{0\}$, $\quad 0<r\leq+\infty$. Supponiamo che $z=0$ sia un polo di ordine k. Allora lo sviluppo di Laurent di f in $z=0$ è dato da

$$f(z)=\sum_{n\geq -k} a_n z^n, \qquad a_n=\frac{1}{(n+k)!}g^{(n+k)}(0), \quad g(z)=z^k f(z).$$

7. Sia $f(z)=\frac{e^z}{(z-i)^3(z+2)^2}$.
   (i) Far vedere che $z=i$ è un polo di f di ordine 3.
   (ii) Calcolare i coefficienti negativi della serie di Laurent di f centrata in $z=i$.
   (iii) Far vedere che $z=-2$ è un polo di f di ordine 2.
   (iv) Calcolare i coefficienti negativi della serie di Laurent di f centrata in $z=-2$.

8. Sia $p(z)=a_0+\ldots+a_n z^n$ un polinomio di grado n. Allora p ha un polo di ordine n all'infinito.

9. Sia $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ una funzione olomorfa intera, non polinomiale. Allora f ha una singolarità essenziale all'infinito.

10. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa che ha uno zero di ordine k in z_0. Allora $1/f$ ha un polo di ordine k in z_0.

11. Sia $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ una funzione razionale, con p, q polinomi complessi, senza fattori comuni.
   (i) Sia α uno zero di q di ordine k. Allora α è un polo di f di ordine k.
   (ii) Sia $s = \deg p - \deg q$. Allora ∞ è un polo di f di ordine s, se $s > 0$, ed è uno zero di f di ordine $|s|$, se $s < 0$. Infine, se $s = 0$, esiste $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = l \neq 0$.

12. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa che ha una singolarità in $z = 0$ (rimovibile, essenziale, polo). Determinare i tipi di singolarià di $1/f$ in $z = 0$, nei vari casi.

13. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa che ha una singolarità in $z = 0$ (rimovibile, essenziale, polo), e sia g una funzione olomorfa su $\mathbf{C}$. Determinare i tipi di singolarià di $g \circ f$ in $z = 0$, nei vari casi.

14. Sia $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ una funzione razionale, dove p e q sono polinomi con $\deg q > \deg p + 1$. Sia C una circonferenza che racchiude tutti gli zeri di q. Allora

$$\int_C \frac{p(z)}{q(z)} dz = 0.$$

15. Determinare il tipo di singolarità delle seguenti funzioni in $z = 0$:

$$z e^{1/z} e^{-1/z^2}, \qquad \frac{\sin z}{z^k},\ k \in \mathbf{N}, \qquad \frac{1}{z^3} - \cos z.$$