7. Formula di Cauchy e stime di Cauchy, teorema di Liouville, zeri di funzioni olomorfe, principio del massimo, lemma di Schwarz. Varie.

---

1. Sia f olomorfa sull'insieme aperto $\Omega \subset \mathbf{C}$, sia $z_0 \in \Omega$ e sia $\sum a_n(z-z_0)^n$ la serie di Taylor di f in z_0. Usando le stime di Cauchy, far vedere che il raggio di convergenza della serie è maggiore o uguale al raggio del piu' grande disco $\Delta(z_0, r)$ di centro z_0 contenuto in Ω.

2. Scrivere la serie di Taylor di $f(z) = \frac{1}{(z+1)}$ in $z_0 = 1+i$. Qual è il raggio di convergenza della serie ottenuta?

3. Trovare tutti gli zeri delle funzioni $\sin z$ e $\cos z$. Sia $U = \mathbf{C} \setminus \{\pi/2 \pm k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$. Sia f olomorfa su U e tale che $f(\pi/n) = \tan(\pi/n)$, $n \geq 3$. Dedurre che f non è olomorfa su tutto $\mathbf{C}$ e che non assume il valore i.

4. Considerare la funzione $f(z) = e^{e^z}$ sul dominio $U = \{z = x+iy \mid -\pi/2 < y < \pi/2\} \subset \mathbf{C}$.
   (a) Calcolare $\sup |f(z)|$ sul bordo di U;
   (b) Calcolare $\sup |f(z)|$ su $\mathbf{R}$;
   Come si conciliano i risulati trovati con il principio del massimo modulo?

5. Considerare la funzione $f(z) = e^z$ sul dominio relativamente compatto $D \subset \mathbf{C}$. Spiegare perchè il massimo e il minimo modulo di f sono assunti sul bordo di D. Calcolarli per $D = \Delta(0,1)$.

6. Sia Δ il disco unità in $\mathbf{C}$ e siano $a, b \in \Delta$. Sia $\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.
   (a) ϕ_a è una funzione olomorfa del disco in sè.
   (b) ϕ_a è invertibile con inversa ϕ_{-a}.
   (c) $\phi_a \circ \phi_b = R_\theta \circ \phi_c$, dove $c = \frac{a+b}{1+a\bar{b}}$ e $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$, con $e^{i\theta} = \frac{1+a\bar{b}}{1+\bar{a}b}$.