6. Formula di Cauchy e stime di Cauchy, teorema di Liouville, zeri di funzioni olomorfe, principio del massimo, lemma di Schwarz. Varie.

1. Far vedere che la funzione $f(z) = \sum_{n\geq 0} 2^{-n} z^{2^n}$ è olomorfa su $\Delta(0,1)$ e continua su $\overline{\Delta(0,1)}$.
   (a) Sia w una radice 2^N-sima dell'unità. Far vedere che $|f'(rw)| \to +\infty$, per $r \to 1^-$.
   (b) È possibile che f sia la restrizione di una funzione olomorfa su un insieme aperto che contiene $\overline{\Delta(0,1)}$?

2. La serie di potenze di $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ intorno a 0 converge solo per $|x| < 1$. D'altra parte, f è analitica reale su tutto $\mathbf{R}$. Come mai la serie non converge su tutto $\mathbf{R}$?

3. Sia $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ olomorfa e doppiamente periodica. Allora f è costante. (doppiamente periodica: per ogni $z \in \mathbf{C}$, si ha $f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2) = f(z)$, dove $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbf{R}$).

4. Sia $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ olomorfa, tale che $|f(z)| \leq M|z|^k$, con M costante positiva, per ogni $z \in \mathbf{C} \setminus \Delta(0,R)$, $R > 0$. Allora f è un polinomio di grado al piu' k.

5. Sia f olomorfa e limitata su $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Far vedere che f è costante. (considereare la funzione $g(z) = z^2 f(z)$ e applicare l'esercizio precedente).

6. Scrivere una funzione olomorfa $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ con infiniti zeri.

7. Scrivere una funzione olomorfa $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ sempre diversa da zero.

8. Sia f una funzione olomorfa su un intorno del disco chiuso $\overline{\Delta(0,1)}$, non identicamente nulla su $\Delta(0,1)$. Allora f ha al piu' un numero finito di zeri in $\Delta(0,1)$.

9. Sia $f(z) = \sin(\frac{1}{1-z})$, olomorfa sul disco $\Delta(0,1)$. Chi sono gli zeri di f? Confrontare con l'esercizio precedente.

10. Sia $\Omega \subset \mathbf{C}$ aperto connesso. Siano $f, g\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ olomorfe, tali che $f \cdot g \equiv 0$. Allora $f \equiv 0$ oppure $g \equiv 0$.

11. Siano $f(z) = z^2 - 3z + 2$ e $g(z) = (2z+1)/(2z-1)$. Calcolare il massimo di $|f(z)|$ e di $|g(z)|$ su $\overline{\Delta(0,1)}$.

12. Sia $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ olomorfa, tale che $|f(z)| \leq |e^z|$, per ogni $z \in \mathbf{C}$. Cosa si puo' dire su f?

13. Sia $f\colon \Delta(0,1) \longrightarrow \Delta(0,1)$ un automorfismo del disco unità, diverso dall'identità.
    (a) Sia $f(0) = 0$. Allora 0 è l'unico punto fisso di f.
    (b) Se f ha un punto fisso in $\Delta(0,1)$, allora è necessariamente unico. (usare il fatto che $Aut(\Delta(0,1))$ opera transitivamente su $\Delta(0,1)$: dati due punti arbitrari $z, w \in \Delta(0,1)$, esiste $g \in Aut(\Delta(0,1))$, tale che $g(z) = w$).