

1. Calcolare

$$\int_{\gamma} 5z^4 - z^3 + 2dz,$$

dove $\gamma = S^1(0, 1) = \{re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$, la circonferenza di centro 0 e raggio 1, oppure γ è il quadrato di vertici 0, 1, $1+i$, i , oppure γ è il segmento di estremi 0, $1+i$.

1. Calcolare

$$\int_{\gamma} \bar{z} + z^2 \bar{z} dz,$$

dove $\gamma = S^1(0, r) = \{re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$, la circonferenza di centro 0 e raggio $r > 0$.

2. Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z+2} dz,$$

dove $\gamma = S^1(0, 5) = \{5e^{-i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$.

3. Calcolare

$$\int_{\gamma} z(z+4) dz,$$

dove $\gamma = \{2e^{-i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}$.

4. Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^{38}} dz,$$

dove $\gamma = S^1(0, 1) = \{e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$.

5. Calcolare

$$\int_{\gamma} \left(\frac{z-2}{2z-1}\right)^3 dz,$$

dove $\gamma = S^1(0, 1) = \{e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$.

6. Siano $|a| < 1 < |b|$. Per $n, m \in \mathbf{Z}$, calcolare

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z-b)^m}{(2z-1)^n} dz,$$

dove $\gamma = S^1(0, 1) = \{e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$.

7. Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz, \quad \int_{\gamma} \frac{e^z}{(z-1/2)^2} dz,$$

dove $\gamma = S^1(0, 1) = \{e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$.

8. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{(z-1)(z-2i)} dz,$$

dove $\gamma = S^1(0, 4) = \{4e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$.

9. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^2 + z}{(z+3)(z-2i)} dz,$$

dove $\gamma = S^1(1, 5) = \{1 + 5e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$.

10. Siano $\gamma_1 = S^1(0, 1) = \{e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$, e $\gamma_2 = S^1(0, 3) = \{3e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$. Calcolare

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{z^2 + 5z}{(z-2)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{z^2 + 5z}{(z-2)} dz \\ & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{z^2 - 2}{z} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{z^2 - 2}{z} dz \\ & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{z^3 - 3z - 6}{z(z+2)(z+4)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{z^3 - 3z - 6}{z(z+2)(z+4)} dz \end{aligned}$$

11. Sia $\gamma = S^1(0, 1) = \{e^{-i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$. Per ogni numero reale λ , dare un esempio di una funzione olomorfa non costante sull'anello $A = \{1/2 < |z| < 2\}$ tale che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(z) dz = \lambda.$$

12. Sia $f = u + iv$ una funzione olomorfa su un disco. Fare vedere che $(u, -v) = \text{grad}F$ e $(v, u) = \text{grad}G$, dove F e G sono funzioni armoniche coniugate.