1. Sia $\{z_n = x_n + iy_n\}$ una successione di numeri complessi e sia $z_0 = x_0 + iy_0$. Far vedere che $z_n \longrightarrow z_0$ se e solo se $\begin{cases} x_n \longrightarrow x_0 \\ y_n \longrightarrow y_0. \end{cases}$
2. Determinare il comportamento delle successioni $\{z_n = (\frac{3}{4} + i\frac{2}{3})^n\}$ e $\{z_n = \frac{1}{5}\frac{1}{(2+i\sqrt{3})^n}\}$.
3. Consideriamo la proiezione stereografica $\pi_{S^2,\mathbf{C}}: S^2 \longrightarrow \mathbf{C}$.
   (a) Far vedere che z, w sono immagini di punti diametralmente opposti di S^2 se e solo se $\bar{z} = -\frac{1}{w}$.
   (b) Determinare l'immagine in $\mathbf{C}$ del meridiano dato dall'intersezione della sfera col piano $x + 2y = 0$.
   (c) Determinare l'immagine in $\mathbf{C}$ del parallelo dato dall'intersezione della sfera col piano $z = 1/2$.
4. Consideriamo l'applicazione $F: \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}^*, \quad z \mapsto \frac{1}{z}$.
   (a) Far vedere che se $|z| < 1$ allora $|F(z)| > 1$ e che se $|z| > 1$ allora $|F(z)| < 1$.
   (b) Determinare i punti fissi $\{z \in \mathbf{C}^* \mid F(z) = z\}$.
   (c) Determinare l'immagine tramite F dell'insieme $\{z \in \mathbf{C}^* \mid |z-1| = 1\}$.
   (d) Determinare l'immagine tramite F dell'insieme $\{z \in \mathbf{C}^* \mid |z-1| = 1/2\}$.
   (e) Determinare l'immagine tramite F dell'insieme $\{z \in \mathbf{C}^* \mid |z-i| = 1/2\}$.
   (f) Determinare l'immagine tramite F dell'insieme $\{z \in \mathbf{C}^* \mid 1/2 < |z| < 2\}$.
   (g) Determinare l'immagine tramite F dell'insieme $\{z \in \mathbf{C}^* \mid 2 < |z| < 3\}$.
5. Siano $z, w \in \mathbf{C}$, con $\bar{z}w \neq 1$. Allora
$$\left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right| = 1$$
   se e solo se $|z| = 1$ oppure $|w| = 1$.
6. Sia $F: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ un polinomio tale che $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$, per ogni $z \in \mathbf{C}$.
   (a) Dimostrare che $F(z, \bar{z}) = zP(\bar{z}) + Q(\bar{z})$, dove P e Q sono polinomi in $\bar{z}$.
   (b) Se vale anche $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$, cosa si può dire su F?
7. Sia $F: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ olomorfa. Dimostrare che se anche $\bar{F}$ è olomorfa, F è costante.
8. Sia $u: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{R}$ di classe C^2 armonica. Allora $h(z) = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial u}{\partial x}$ è olomorfa.
9. Sia $F: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ armonica. Allora anche $\bar{F}$ è armonica.
10. Sia $F: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ olomorfa e non nulla. Allora $\log|F|$ è armonica.
11. Sia $F: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ olomorfa. Allora
$$\Delta(|F|^2) = 4|\frac{\partial F}{\partial z}|^2.$$
12. Sia $A\{z \in \mathbf{C} \mid \pi/4 < \mathrm{Im} z < \pi\}$.
   (a) Dimostrare che la funzione esponenziale $f(z) = e^z$ ristretta ad A è iniettiva.
   (b) Sia $A' = f(A)$. Determinare gli altri sottoinsiemi $B \subset \mathbf{C}$, tali che $f(B) = A'$.
   (c) Determinare se $1 + i$ e $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ appartengono ad A'.
   (d) Fissare $\log w$, $w \in A'$, una determinazione del logaritmo su A'. Far vedere che $w_0 = 2 + i2\sqrt{3} \in A'$ e calcolare $\log w_0$.
13. Sia $A = \{z \in \mathbf{C} \mid -\pi/4 < \arg z < \pi/2\}$. Sia $f(z) = z^{1/4}$.
   (a) Determinare i sottoinsiemi $B \subset \mathbf{C}$, tali che $f(B) = A$.
   (b) Fissata su A la determinazione di f che soddisfa $f(1) = -i$, dare un'espressione analitica di f e verificare che soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann.
   (c) Calcolare $f(1+i)$ ed $f(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$.