1. *Determinare l'anello di convergenza delle serie di Laurent*

$$(i)\ \sum_{n\in\mathbf{Z}} a^{n^2} z^n, \quad |a|<1, \qquad (ii)\ \sum_{n\in\mathbf{Z}} a^n z^n, \quad a\neq 0, \qquad (iii)\ \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{z^n}{|n|!}, \qquad (iv)\ \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{(z-3)^{2n}}{(n^2+1)^n}.$$

$$(i)\ \sum_{n\in\mathbf{Z}} a^{n^2} z^n = \sum_{n>0} a^{n^2}\frac{1}{z^n} + \sum_{n\geq 0} a^{n^2} z^n.$$

La prima è una serie di potenze di $\frac{1}{z}$, con raggio di convergenza $R_1=+\infty$; la seconda è una serie di potenze di z, con raggio di convergenza $R_2=+\infty$. Di conseguenza la serie di Laurent converge per $0=\frac{1}{R_1}<|z|<R_2=+\infty$, ossia su $\mathbf{C}^*$.

$$(ii)\ \sum_{n\in\mathbf{Z}} a^n z^n = \sum_{n>0} \frac{1}{a^n}\frac{1}{z^n} + \sum_{n\geq 0} a^n z^n.$$

La prima è una serie di potenze di $\frac{1}{z}$, con raggio di convergenza $R_1=|a|$; la seconda è una serie di potenze di z, con raggio di convergenza $R_2=\frac{1}{|a|}$. Di conseguenza la serie di Laurent converge per $\frac{1}{|a|}=\frac{1}{R_1}<|z|<R_2=\frac{1}{|a|}$, ossia *mai.*

$$(iii)\ \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{z^n}{|n|!} = \sum_{n>0} \frac{1}{n!z^n} + \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

La prima è una serie di potenze di $\frac{1}{z}$, con raggio di convergenza $R_1=+\infty$; la seconda è una serie di potenze di z, con raggio di convergenza $R_2=+\infty$. Di conseguenza la serie di Laurent converge per $0=\frac{1}{R_1}<|z|<R_2=+\infty$, ossia su $\mathbf{C}^*$. Questa serie di Laurent definisce la funzione $F(z)=e^{1/z}-1+e^z$, che è olomorfa su $\mathbf{C}^*$.

$$(iv)\ \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{(z-3)^{2n}}{(n^2+1)^n} = \sum_{n>0} \frac{(n^2+1)^n}{(z-3)^{2n}} + \sum_{n\geq 0} \frac{(z-3)^{2n}}{(n^2+1)^n}.$$

La prima è una serie di potenze di $\frac{1}{(z-3)}$, con raggio di convergenza $R_1=0$; la seconda è una serie di potenze di $(z-3)$, con raggio di convergenza $R_2=+\infty$. Di conseguenza la serie di Laurent converge per $+\infty=\frac{1}{R_1}<|z|<R_2=+\infty$, ossia *mai.*

2. *Sia* $f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}$, $\quad 0<|a|<|b|$.
   (i) Determinare le 3 serie di Laurent di f *centrate in zero: su* $\Delta(0,|a|)$, *su* $A_{|a|,|b|}(0)$ *e su* $A_{|b|,+\infty}(0)$.
   (ii) Determinare le 2 serie di Laurent di f *centrate in* $z=a$*: su* $A_{0,|a-b|}(a)$ *e su* $A_{|a-b|,+\infty}(a)$.

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{A}{z-a}+\frac{B}{z-b}, \qquad A=\frac{1}{a-b}, \quad B=-A.$$

(i) Su $\Delta(0,|a|)$ valgono $|\frac{z}{a}|<1$ e $|\frac{z}{b}|<1$, per cui

$$\frac{1}{z-a}=-\frac{1}{a}\sum_{n\geq 0}(\frac{z}{a})^n,\qquad \frac{1}{z-b}=-\frac{1}{b}\sum_{n\geq 0}(\frac{z}{b})^n.$$

Dunque su $\Delta(0,|a|)$ la serie di Laurent di f è data da

$$f(z)=-A\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{a^{n+1}}-B\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{b^{n+1}}=-\sum_{n\geq 0}(\frac{A}{a^{n+1}}+\frac{B}{b^{n+1}})z^n.$$

Su $A_{|a|,|b|}(0)$ valgono $|\frac{z}{a}|>1$ e $|\frac{z}{b}|<1$, per cui

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{z}\frac{1}{(1-\frac{a}{z})}=\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(\frac{a}{z})^n=\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{z^{n+1}},\quad \frac{1}{z-b}=-\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{b^{n+1}}.$$

Dunque su $A_{|a|,|b|}(0)$ la serie di Laurent di f è data da

$$f(z)=A\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{z^{n+1}}-B\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{b^{n+1}}=etc\ldots$$

Su $A_{|b|,+\infty}(0)$ valgono $|\frac{z}{a}|>1$ e $|\frac{z}{b}|>1$, per cui

$$\frac{1}{z-a}=\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{z^{n+1}},\quad \frac{1}{z-b}=\sum_{n\geq 0}\frac{b^n}{z^{n+1}}.$$

Dunque su $A_{|b|,+\infty}(0)$ la serie di Laurent di f è data da

$$f(z)=A\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{z^{n+1}}+B\sum_{n\geq 0}\frac{b^n}{z^{n+1}}=etc\ldots$$

(ii) Su $A_{0,|a-b|}(a)$, $\frac{A}{z-a}$ coincide col suo sviluppo di Laurent centrato in $z=a$. La funzione $\frac{B}{z-b}$ è olomorfa ed ammette uno sviluppo di Taylor centrato in $z=a$. Poiché $|\frac{z-a}{b-a}|<1$, si ha

$$\frac{B}{z-b}=\frac{B}{\frac{z-a}{b-a}-1}=-B\sum_{n\geq 0}(\frac{z-a}{b-a})^n.$$

Dunque su $A_{0,|a-b|}(a)$, la serie di Laurent di f è data da

$$f(z)=\frac{A}{z-a}-B\sum_{n\geq 0}(\frac{z-a}{b-a})^n=etc\ldots$$

Su $A_{|a-b|,+\infty}(a)$, $\frac{A}{z-a}$ coincide col suo sviluppo di Laurent centrato in $z=a$. Poiché $|\frac{z-a}{b-a}|>1$ e $|\frac{b-a}{z-a}|<1$, si ha

$$\frac{B}{z-b}=\frac{B}{1-\frac{b-a}{z-a}}=B\sum_{n\geq 0}(\frac{b-a}{z-a})^n.$$

Dunque su $A_{|a-b|,+\infty}(a)$ la serie di Laurent di f è data da

$$f(z) = \frac{A}{z-a} + B\sum_{n\geq 0}(\frac{b-a}{z-a})^n = etc\ldots$$

3. *Sia* $f(z) = \frac{z^2}{z^2+1}$.
   (i) Determinare la serie di Laurent di f *intorno a* $z = i$.
   (ii) Determinare il tipo di singolarità di f *all'infinito.*

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2+1} = 1 - \frac{1}{z^2+1} = 1 + \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-i}, \qquad A = 1/2, \quad B = -1/2.$$

(i) Su $A_{0,2}(i)$, $\frac{B}{z-i}$ coincide col suo sviluppo di Laurent centrato in $z = i$. La funzione $1 + \frac{A}{z+i}$ è olomorfa ed ha uno sviluppo di Taylor centrato in $z = i$ dato da

$$1 + \frac{A}{2i(1+\frac{z-i}{2i})} = 1 + \frac{A}{2i}\sum_{n\geq 0}(-1)^n(\frac{z-i}{2i})^n = 1 + A\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2i)^{n+1}}.$$

Dunque su $A_{0,2}(i)$ la serie di Laurent di f è data da

$$\frac{B}{z-i} + 1 + A\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2i)^{n+1}} = etc\ldots$$

(ii) $\lim_{|z|\to+\infty}\frac{z^2}{z^2+1} = 1$, per cui ∞ è una singolarità rimovibile per f.

4. *Sia* $f(z) = \frac{z}{z-1}$.
   (i) Determinare le serie di Laurent di f *centrate in* $z = 1$.
   (ii) Determinare il tipo di singolarità di f *all'infinito.*

(i) f è una funzione olomorfa su $\mathbf{C}\setminus\{1\}$; la sua serie di Laurent centrata in $z = 1$ converge su tutto $\mathbf{C}\setminus\{1\} = A_{0,+\infty}(1)$ ed è data da

$$f(z) = \frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z-1}.$$

(ii) $\lim_{|z|\to+\infty}\frac{z}{z-1} = 1$, per cui ∞ è una singolarità rimovibile per f.

5. *Sia* $f(z) = \frac{1}{z(z-1)} + \frac{1}{(z-3)}$.
   (i) Determinare la serie di Laurent di f *intorno a* $z = 0$.
   (ii) Determinare la serie di Laurent di f *intorno a* $z = 1$.
   (iii) Determinare il tipo di singolarità di f *all'infinito.*

La funzione

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} + \frac{1}{(z-3)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z-3}$$

è olomorfa su $\mathbf{C}\setminus\{0,1,3\}$.

(i) Ci sono tre serie di Laurent di f centrate in $z = 0$ e convergenti rispettivamente su $A_{0,1}(0)$, $A_{1,3}(0)$, $A_{3,+\infty}(0)$. La serie "intorno" a $z = 0$ è quella su $A_{0,1}(0)$: su questo anello $\frac{1}{z}$ coincide già con il suo sviluppo di Laurent, inoltre

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n\geq 0} z^n, \qquad \frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}(\frac{z}{3})^n.$$

Di conseguenza, lo sviluppo di Laurent di f intorno $z = 0$ è dato da

$$f(z) = -\frac{1}{z} - \sum_{n\geq 0} z^n - \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{3^{n+1}} = etc\ldots$$

(ii) Ci sono tre serie di Laurent di f centrate in $z = 1$ e convergenti rispettivamente su $A_{0,1}(1)$, $A_{1,2}(1)$, $A_{2,+\infty}(1)$. La serie "intorno" a $z = 1$ è quella su $A_{0,1}(1)$: su questo anello $\frac{1}{z-1}$ coincide già con il suo sviluppo di Laurent, inoltre

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n(z-1)^n, \qquad \frac{1}{z-3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{(1-z)}{2}} = -\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(1-z)^n}{2^{n+1}}.$$

Di conseguenza, lo sviluppo di Laurent di f intorno $z = 1$ è dato da

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \sum_{n\geq 0}(-1)^n(z-1)^n - \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} = etc\ldots.$$

(iii) Ponendo $z = \frac{1}{u}$, troviamo lo sviluppo di Laurent di f intorno ad ∞ (per $u = 0$)

$$f(\frac{1}{u}) = \ldots = \frac{u}{1-u} - u + \frac{u}{1-3u}.$$

In particolare, $\lim_{z\to 0} f(\frac{1}{u}) = 0$, per cui ∞ è una singolarità rimovibile per f.

6. *Sia f una funzione olomorfa sull'insieme $\Delta(0,r)\setminus\{0\}$, $0 < r \leq +\infty$. Supponiamo che $z = 0$ sia un polo di ordine k. Allora lo sviluppo di Laurent di f in $z = 0$ è dato da*

$$f(z) = \sum_{n\geq -k} a_n z^n, \qquad a_n = \frac{1}{(n+k)!}g^{(n+k)}(0), \quad g(z) = z^k f(z).$$

Scriviamo $f(z) = \frac{1}{z^k}(a_{-k} + a_{-k+1}z + \ldots)$, con $a_{-k} \neq 0$. La funzione $g(z) = z^k f(z)$ è olomorfa intorno a $z = 0$ e la sua serie di Taylor centrata in $z = 0$ è data da $a_{-k} + a_{-k+1}z + \ldots$: in altre parole

$$a_{-k} = g(0), \quad a_{-k+1} = g'(0), \quad a_{-k+2} = \frac{1}{2}g''(0), \ldots, a_n = \frac{1}{(n+k)!}g^{(n+k)}(0).$$

7. *Sia $f(z) = \frac{e^z}{(z-i)^3(z+2)^2}$.*
   (i) Far vedere che $z = i$ è un polo di f di ordine 3.
   (ii) Calcolare i coefficienti "negativi" della serie di Laurent di f intorno a $z = i$.
   (iii) Far vedere che $z = -2$ è un polo di f di ordine 2.

(iv) *Calcolare i coefficienti "negativi" della serie di Laurent di f intorno a $z=-2$.*

La funzione $f(z) = \frac{e^z}{(z-i)^3(z+2)^2}$ è olomorfa su $\mathbf{C} \setminus \{i,-2\}$.
(i) Sia $g(z) = (z-i)^3 f(z) = \frac{e^z}{(z+2)^2}$. Poiché esiste finito $\lim_{z\to i} g(z)$, la funzione g è olomorfa in un intorno di $z=i$. D'altra parte $\lim_{z\to i} |(z-i)^2 f(z)| = +\infty$. Segue che $z=i$ è un polo di f di ordine 3.
(ii) La serie di Laurent di f intorno a $z=i$ contiene tre potenze negative di $(z-i)$, i cui coefficienti sono dati rispettivamente da

$$a_{-3} = g(i) = \frac{\cos 1 + i\sin 1}{3+4i}, \quad a_{-2} = g'(i) = etc..., \quad a_{-1} = \frac{1}{2}g''(i) = etc...$$

(iii) Sia $g(z) = (z+2)^2 f(z) = \frac{e^z}{(z-i)^3}$. Poiché esiste finito $\lim_{z\to -2} g(z)$, la funzione g è olomorfa in un intorno di $z=-2$. D'altra parte $\lim_{z\to -2} |(z+2) f(z)| = +\infty$. Segue che $z=i$ è un polo di f di ordine 2.
(iv) La serie di Laurent di f intorno a $z=-2$ contiene due potenze negative di $(z+2)$, i cui coefficienti sono dati rispettivamente da

$$a_{-2} = g(-2) = -\frac{e^{-2}}{(2+i)^3}, \qquad a_{-1} = g'(-2) = etc...$$

8. *Sia $p(z) = a_0 + \ldots + a_n z^n$ un polinomio di grado n. Allora p ha un polo di ordine n all'infinito.*

Ponendo $z = \frac{1}{u}$, troviamo lo sviluppo di Laurent di p intorno ad ∞ (per $u=0$)

$$p(\frac{1}{u}) = a_0 + a_1\frac{1}{u} + \ldots + a_n\frac{1}{u^n}.$$

In particolare, p ha un polo di ordine n all'infinito.

9. *Sia $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ una funzione olomorfa intera, non polinomiale. Allora f ha una singolarità essenziale all'infinito.*

Ponendo $z = \frac{1}{u}$, troviamo lo sviluppo di Laurent di f intorno ad ∞ (per $u=0$)

$$f(\frac{1}{u}) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{1}{u^n}.$$

In particolare, se non è un polinomio, f ha una singolarità essenziale all'infinito.

10. *Sia $f(z)$ una funzione olomorfa che ha uno zero di ordine k in z_0. Allora $1/f$ ha un polo di ordine k in z_0.*

Sia $f(z) = (z-z_0)^k(a_k + a_{k+1}(z-z_0) + \ldots)$, con $a_k \neq 0$, lo sviluppo di Taylor di f centrato in z_0. Allora

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^k} \cdot \frac{1}{a_k + a_{k+1}(z-z_0) + \ldots}.$$

Poiché esiste finito $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)$, la funzione $(z-z_0)^k f(z)$ è olomorfa in un intorno di $z=z_0$. D'altra parte $\lim_{z\to z_0}|(z-z_0)^{k-1}f(z)|=+\infty$. Segue che $z=z_0$ è un polo di $1/f$ di ordine k.

11. *Sia $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ una funzione razionale, con p, q polinomi complessi, senza fattori comuni.*
    (i) Sia α uno zero di q di ordine k. Allora α è un polo di f di ordine k.
    (ii) Sia $s=\deg p-\deg q$. Allora ∞ è un polo di f di ordine s, se $s>0$, ed è uno zero di f di ordine $|s|$, se $s<0$. Infine, se $s=0$, esiste $\lim_{|z|\to\infty} f(z)=l\neq 0$.

(i) Scriviamo $q(z)=(z-\alpha)^k s(z)$, dove $s(z)$ è un polinomio che soddisfa $s(\alpha)\neq 0$. Allora

$$f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{p(z)}{(z-\alpha)^k s(z)}, \qquad p(\alpha), s(\alpha)\neq 0,$$

da cui risulta che α è un polo di f di ordine k.
(ii) Scriviamo $p(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ e $q(z)=b_0+b_1z+\ldots+b_mz^m$, con $a_n, b_m\neq 0$. Ponendo $z=\frac{1}{u}$, troviamo lo sviluppo di Laurent di f intorno ad ∞ (per $u=0$)

$$f(\frac{1}{u})=\frac{a_0+a_1\frac{1}{u}+\ldots+a_n\frac{1}{u^n}}{b_0+b_1\frac{1}{u}+\ldots+b_m\frac{1}{u^m}}=\frac{u^m}{u^n}\cdot\frac{a_0u^n+a_1u^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0u^m+b_1u^{n-1}+\ldots+b_m}.$$

È chiaro adesso che ∞ è un polo di f di ordine $s=n-m$, se $n-m>0$ mentre è uno zero di f di ordine $|s|=m-n$, se $n-m<0$. Infine, se $n=m$, si ha che

$$\lim_{|z|\to+\infty} f(z)=\frac{a_n}{b_n},$$

e dunque ∞ è una singolarità rimovibile di f.

12. *Sia $f(z)$ una funzione olomorfa che ha una singolarità in $z=0$ (rimovibile, essenziale, polo). Determinare i tipi di singolarià di $1/f$ in $z=0$, nei vari casi.*

(i) $z=0$ singolarità rimovibile per f: allora in $z=0$ la funzione $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ è olomorfa se $f(0)\neq 0$, mentre ha un polo di ordine k se $f(0)=0$, con ordine k.
(ii) $z=0$ polo di ordine k per f: scriviamo $f(z)=\frac{h(z)}{z^k}$, con h olomorfa e $h(0)\neq 0$. Allora $g(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{z^k}{h(z)}$ ha uno zero di ordine k in $z=0$. In particolare, $z=0$ risulta una singolarità rimovibile per g.
(iii) $z=0$ singolarità essenziale per f: allora $z=0$ è una singolarità essenziale anche per $1/f$. Infatti, se $|f|$ non è limitata in un intorno di $z=0$, né vale $\lim_{z\to 0}|f(z)|=+\infty$, l'immagine di $\Delta\setminus\{0\}$ tramite f è densa in $\mathbf{C}$ e lo stesso è vero anche per $\frac{1}{f(z)}$.

13. *Sia $f(z)$ una funzione olomorfa che ha una singolarità in $z=0$ (rimovibile, essenziale, polo), e sia g una funzione olomorfa su $\mathbf{C}$. Determinare i tipi di singolarià di $g\circ f$ in $z=0$, nei vari casi.*

(i) $z=0$ singolarità rimovibile per f: allora $g\circ f$ è olomorfa in $z=0$.

(ii) $z=0$ polo di ordine k per f: scriviamo $f(z)=\frac{h(z)}{z^k}$, con h olomorfa e $h(0)\neq 0$, e $g(z)=\sum_{m\geq 0} b_m z^m$. Allora su un opportuno anello intorno a $z=0$, dove le serie di f e di g convergono assolutamente,

$$g\circ f(z)=\sum_{m\geq 0} b_m(\frac{h(z)}{z^k})^m = etc\ldots$$

Riordinando i termini della serie di $g\circ f$, si vede che $z=0$ è un polo di $g\circ f$ se g è un polinomio, altrimenti è una singolarità essenziale.
(iii) $z=0$ singolarità essenziale per f: allora $z=0$ è una singolarità essenziale anche per $g\circ f$. Infatti ragionando come sopra, se $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ e $g(z)=\sum_{m\geq 0} b_m z^m$, si ha che

$$g\circ f(z)=\sum_{m\geq 0} b_m(\sum_{n\geq 0} a_n z^n)^m = etc\ldots$$

dove la serie riordinata contiene infinite potenze negative di z.

14. *Sia $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ una funzione razionale, dove p e q sono polinomi con $\deg q > \deg p + 1$. Sia C una circonferenza che racchiude tutti gli zeri di q. Allora*

$$\int_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = 0.$$

Sia C_R la circonferenza di centro 0 e raggio R e sia $Z=\{Z_j\}$ l'insieme degli zeri di q. Gli zeri di q sono poli di f e per il teorema dei residui

$$\int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_j Res_f(Z_j), \qquad \forall R >> 0.$$

D'altra parte, per l'ipotesi sui gradi di $p(z)=\sum_{j=1}^n a_j z^j$ e $q(z)=\sum_{j=1}^m b_j z^j$

$$|\int_{C_R} f(z)dz| \leq 2\pi R \sup_{C_R}|f(z)| \leq 2\pi R\frac{|a_n|R^n+\ldots+|a_0|}{|b_m|R^m-\ldots-|b_0|}$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0,$$

da cui la tesi.

15. *Determinare il tipo di singolarità delle seguenti funzioni in $z=0$:*

$$(i)\ ze^{1/z}e^{-1/z^2}, \qquad (ii)\ \frac{\sin z}{z^k},\ k\in\mathbf{N}, \qquad (iii)\ \frac{1}{z^3}-\cos z.$$

(i) $z=0$ è una singolarità essenziale:

$$ze^{1/z}e^{-1/z^2} = ze^{(z-1)/z^2} = z\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\frac{(z-1)^n}{z^{2n}} = etc\ldots$$

(ii) $z=0$ è un polo di ordine $k-1$:

$$\frac{\sin z}{z^k} = \frac{\sin z}{z}\frac{1}{z^{k-1}}, \qquad \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1.$$

(iii) $z=0$ è un polo di ordine 3: infatti $\cos z$ è olomorfa intorno a $z=0$ e $\frac{1}{z^3}$ ha in $z=0$ un polo di ordine 3.