1. Sia f olomorfa sull'insieme aperto $\Omega \subset \mathbf{C}$, sia $z_0 \in \Omega$ e sia $\sum a_n(z-z_0)^n$ la serie di Taylor di f in z_0. Usando le stime di Cauchy, far vedere che il raggio di convergenza della serie è maggiore o uguale al raggio del piu' grande disco $\Delta(z_0, r)$ di centro z_0 contenuto in Ω.

Sia $\Delta(z_0, r)$ il piu' grande disco di centro z_0 contenuto in Ω, dove $r = d(z_0, \partial\Omega)$. Per ogni $s < r$,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{S^1(z_0,s)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

La serie di Taylor di f in z_0 è data da $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$, con $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Dalle stime di Cauchy si ha la maggiorazione

$$|a_n| \leq \frac{Mn!}{n!s^n} = \frac{M}{s^n}, \qquad M = \sup_{S^1(z_0,s)} |f(\xi)|.$$

Di conseguenza

$$\frac{1}{R} = \limsup_n |a_n|^{1/n} \leq \frac{1}{s} \qquad \text{e} \qquad R \geq s.$$

Poiché $R \geq s$, per ogni $s < r$, vale $R \geq r$, come richiesto.

2. Scrivere la serie di Taylor di $f(z) = \frac{1}{(z+1)}$ in $z_0 = 1+i$. Qual è il raggio di convergenza della serie ottenuta?

Calcolando le derivate successive di f troviamo

$$f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n n!}{(z+1)^{n+1}}, \qquad f^{(n)}(1+i) = \frac{(-1)^n n!}{(2+i)^{n+1}},$$

e la serie di Taylor di f in $z_0 = 1+i$ risulta

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2+i)^{n+1}}(z-z_0)^n, \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{(2+i)^{n+1}}.$$

Il raggio di convergenza è dato da

$$R = \frac{1}{\limsup_n |a_n|^{1/n}} = |2+i| = \sqrt{5}.$$

Osserviamo che $R = \sqrt{5}$ coincide con la distanza $d(1+i, -1)$ di $(1+i)$ dal punto singolare $z = -1$.

3. Trovare tutti gli zeri delle funzioni $\sin z$ e $\cos z$. Sia $U = \mathbf{C} \setminus \{\pi/2 \pm k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$. Sia f olomorfa su U e tale che $f(\pi/n) = \tan(\pi/n)$, $n \geq 3$. Dedurre che f non è olomorfa su tutto $\mathbf{C}$ e che non assume il valore i.

Gli zeri di $\sin z$ e di $\cos z$ sono dati rispettivamente dagli insiemi

$$Z_1 = \{z = x + iy \mid y = 0,\ x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\} \quad Z_2 = \{z = x + iy \mid y = 0,\ x = (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

La funzione $\tan z = \sin z / \cos z$ è ben definita e olomorfa sull'insieme *connesso* $U = \mathbf{C} \backslash Z_2$. L'insieme infinito $A = \{\pi/n\}_{n \geq 3}$ è contenuto in U insieme al suo punto di accumulazione $z_0 = 0$. L'insieme $A \cup \{0\}$ è un insieme di "unicità" in U, ossia due funzioni olomorfe su U, che coincidono su $A \cup \{0\}$, coincidono necessariamente su tutto U. In particolare, $f(\pi/n) = \tan(\pi/n),\ n \geq 3$ implica $f(z) = \tan(z)$, per ogni $z \in U$. Ne segue che f non è olomorfa su tutto $\mathbf{C}$ (poiché la tangente non lo è). Inoltre, f non assume il valore i (poiché la tangente non lo assume):

$$\tan(z) = i \Leftrightarrow \sin z = i \cos z \Rightarrow (i \cos z)^2 + (\cos z)^2 = 0,$$

mentre deve valere $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$.

4. Considerare la funzione $f(z) = e^{e^z}$ sul dominio $U = \{z = x + iy \mid -\pi/2 < y < \pi/2\} \subset \mathbf{C}$.
   (a) Calcolare $\sup |f(z)|$ sul bordo di U;
   (b) Calcolare $\sup |f(z)|$ su $\mathbf{R}$;
   Come si conciliano i risulati trovati con il principio del massimo modulo?

(a) Il bordo di U è dato da

$$\partial U = \{z = x + iy \mid y = -\pi/2\} \cup \{z = x + iy \mid y = \pi/2\}.$$

La funzione $|f(z)|$ è data da

$$|f(z)| = |e^{e^{x+iy}}| = |e^{e^x(\cos y + i \sin y)}| = |e^{e^x \cos y} e^{ie^x \sin y}| = e^{e^x \cos y},$$

da cui segue che $|f| \equiv 1$ su ∂U.
(b) Poiché $\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty$, si ha che $\sup_{\mathbf{R}} |f(z)| = +\infty$.
I risultati trovati non contraddicono il principio del massimo, che esclude l'esistenza di punti di massimo locale per $|f|$ interni ad U: infatti nessun punto $z \in U$ è un punto di massimo locale per $|f|$ (controllare le derivate parziali di $|f|$ rispetto a x e rispetto a y).

5. Considerare la funzione $f(z) = e^z$ sul dominio relativamente compatto $D \subset \mathbf{C}$. Spiegare perchè il massimo e il minimo modulo di f sono assunti sul bordo di D. Calcolarli per $D = \Delta(0, 1)$.

La funzione $|f(z)|$, ben definita e continua su $\overline{D}$, assume su $\overline{D}$ massimo e minimo. Il principio del massimo modulo esclude l'esistenza di punti di massimo locale per $|f|$ interni a D. Dunque il massimo di $|f|$ è assunto sul bordo di D. Riguardo al minimo di $|f|$, osserviamo che $f(z) = e^z \neq 0$. Ne segue che anche il minimo di $|f|$ è assunto sul bordo di D, altrimenti il modulo della funzione $g(z) = 1/f(z)$, ben definita e olomorfa su D, avrebbe un massimo locale interno a D (assurdo). Massimo e minimo di $|f|$ su $\overline{\Delta(0, 1)}$ sono rispettivamente $M = e$ e $m = 1/e$.

6. Sia Δ il disco unità in $\mathbf{C}$ e siano $a, b \in \Delta$. Sia $\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.
   (a) ϕ_a è una funzione olomorfa del disco in sè.
   (b) ϕ_a è invertibile con inversa ϕ_{-a}.
   (c) $\phi_a \circ \phi_b = R_\theta \circ \phi_c$, dove $c = \frac{a+b}{1+a\bar{b}}$ e $R_\theta(z) = e^{i\theta} z$, con $e^{i\theta} = \frac{1+a\bar{b}}{1+\bar{a}b}$.

Per ogni $a \in \Delta$, la funzione $\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ è ben definita e olomorfa su Δ. Infatti il denominatore è diverso da zero: $|1-\bar{a}z| \geq 1-|az| \neq 0$. Inoltre manda il disco in sè

$$|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}|^2 < 1 \Leftrightarrow |z-a|^2 < |1-\bar{a}z|^2 \Leftrightarrow |z|^2(1-|a|^2) < (1-|a|^2) \Leftrightarrow |z| < 1,$$

e il bordo del disco in sè

$$|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

Poiché dato $w \in \Delta$

$$w = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \Leftrightarrow z-a = w(1-\bar{a}z) \Leftrightarrow z = \frac{w+a}{1+\bar{a}w},$$

si ha che ϕ_a è bigettiva e la sua inversa è ϕ_{-a}. Abbiamo così dimostrato (a) e (b). Infine

$$\phi_a \circ \phi_b(z) = \frac{\frac{z-b}{1-\bar{b}z} - a}{1-\bar{a}\frac{z-b}{1-\bar{b}z}} = \frac{z-b-a(1-\bar{b}z)}{1-\bar{b}z-\bar{a}(z-b)} = \frac{z(1+a\bar{b})-(a+b)}{1+\bar{a}b-(\bar{a}+\bar{b})z} = \frac{(1+a\bar{b})}{(1+\bar{a}b)} \frac{z - \frac{(a+b)}{(1+a\bar{b})}}{1-\frac{(\bar{a}+\bar{b})}{(1+\bar{a}b)}z}.$$

Poiché $|\frac{(1+a\bar{b})}{(1+\bar{a}b)}| = 1$, anche il punto (c) è dimostrato.