6. Formula di Cauchy e stime di Cauchy, teorema di Liouville, zeri di funzioni olomorfe, principio del massimo, lemma di Schwarz. Varie.

---

1. Far vedere che la funzione $f(z)=\sum_{n\ge 0}2^{-n}z^{2^n}$ è olomorfa su $\Delta(0,1)$ e continua su $\overline{\Delta(0,1)}$.
   (a) Sia w una radice 2^N-sima dell'unità. Far vedere che $|f'(rw)|\to+\infty$, per $r\to 1^-$.
   (b) È possibile che f sia la restrizione di una funzione olomorfa su un insieme aperto che contiene $\overline{\Delta(0,1)}$?

La serie $\sum_{n\ge 0}2^{-n}z^{2^n}$ ha raggio di convergenza $R=1$ e converge assolutamente su $\Delta(0,1)$

$$\sum_{n\ge 0}|2^{-n}z^{2^n}|\le\sum_{n\ge 0}2^{-n}<+\infty.$$

Quindi $f(z)=\sum_{n\ge 0}2^{-n}z^{2^n}$ è una funzione olomorfa su $\Delta(0,1)$, continua su $\overline{\Delta(0,1)}$, con derivata $f'(z)=\sum_{n\ge 0}z^{2^n-1}$ su $\Delta(0,1)$.

Nel caso in cui $z^{2^N}=1$, cioè z è una radice 2^N-sima dell'unità, si ha che $z^{2^{N+k}}\equiv 1$, per ogni $k\ge 0$. Al variare di N, le radici 2^N-sime dell'unità formano un sottoinsieme denso di $S^1(0,1)$.

(a) Fissiamo adesso una radice 2^N-sima dell'unità z_0. Abbiamo che $(rz_0)^{2^{N+k}}=r^{2^{N+k}}z_0^{2^{N+k}}\equiv r^{2^{N+k}}$, per ogni $k\ge 0$. Di conseguenza, dimostrare che $|f'(rw)|\to+\infty$, per $r\to 1^-$, equivale a dimostrare che

$$\lim_{r\to 1^-}\sum_{n\ge 0}r^{2^n-1}=+\infty. \qquad (*)$$

Scriviamo $r=(1-\epsilon)$ e osserviamo che $(1-\epsilon)^m>1-m\epsilon$, per ogni $m>1$ (induzione). Dimostriamo (*) facendo vedere che, per ogni $M>0$ fissato e per ogni $\epsilon<1/M(2^M-1)$, la somma dei primi M termini della serie $\sum_{n\ge 0}r^{2^n-1}$ è maggiore di $M-1$. Infatti

$$\forall\ 0\le n\le M,\quad (1-\epsilon)^{2^n-1}>1-(2^n-1)\epsilon>1-(2^n-1)/M(2^M-1)\ge 1-1/M,$$

e

$$\sum_{n=0}^{M}(1-\epsilon)^{2^n-1}>M(1-1/M)=M-1.$$

(b) Sia Ω un aperto che contiene propriamente $\overline{\Delta(0,1)}$. Allora la distanza di 0 dal bordo di Ω è maggiore di 1 ed esiste $\rho>1$ tale che $\overline{\Delta(0,1)}\subset\Delta(0,\rho)\subset\Omega$. Se f fosse la restrizione di una funzione olomorfa su Ω, la serie di potenze $\sum_{n\ge 0}2^{-n}z^{2^n}$ dovrebbe convergere insieme a tutte le sue derivate su $\Delta(0,\rho)$ e in particolare su $\overline{\Delta(0,1)}$. Questo non avviene. In effetti, dal punto (a) si puo' concludere di piu': non esiste nessun punto $z_0\in S^1(0,1)$ con la proprietà che f è olomorfa su $\Delta(0,1)\cup\Delta(z_0,\epsilon)$, per qualche $\epsilon>0$.

2. La serie di potenze di $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ intorno a 0 converge solo per $|x|<1$. D'altra parte, f è analitica reale su tutto $\mathbf{R}$. Come mai la serie non converge su tutto $\mathbf{R}$?

Consideriamo la funzione $g(z)=\frac{1}{1+z^2}$: è ben definita e olomorfa su $\mathbf{C}\setminus\{\pm i\}$. Sul disco $\Delta(0,1)$, la funzione coincide con la somma della serie di potenze

$$g(z)=\frac{1}{1+z^2}=\sum_n(-1)^nz^{2n}. \qquad (*)$$

La serie, che coincide con la serie di Taylor di g in $z = 0$, ha raggio di convergenza $R = 1$. Questo puo' essere verificato direttamente col criterio della radice. Oppure, puo' essere dedotto nel seguente modo: poiché $\Delta(0,1)$ è il più grande disco di centro 0 contenuto in $\mathbf{C} \setminus \{\pm i\}$, si ha che $R \geq 1$. D'altra parte, se fosse $R > 1$, la funzione $f(z)$ coinciderebbe con la somma della serie (*) su $\Delta(0,R)$ e sarebbe limitata nelle vicinanze di $\pm i$. Il che è falso. Dunque $R = 1 = d(0,i) = d(0,-i)$. Poiché la serie (*) ha coefficienti reali, e g coincide con $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sull'asse reale, la serie $\sum_n (-1)^n x^{2n}$ è la serie di Taylor di f in $x = 0$. Se $\sum_n (-1)^n x^{2n}$ convergesse per qualche $|x| > 1$, anche $\sum_n (-1)^n |z|^{2n}$ convergerebbe per $|z| = |x| > 1$, in contraddizione col fatto che $R = 1$.

3. Sia $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ olomorfa e doppiamente periodica. Allora f è costante. (doppiamente periodica: per ogni $z \in \mathbf{C}$, si ha $f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2) = f(z)$, dove $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbf{R}$).

I valori di f sono tutti e soli quelli assunti sul sottoisieme di $\mathbf{C}$

$$\Omega = \{z = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ 0 \leq \alpha \leq 1,\ 0 \leq \beta \leq 1\}.$$

In particolare, f è limitata e dunque costante per il teorema di Liouville.

4. Sia $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ olomorfa, tale che $|f(z)| \leq M|z|^k$, con M costante positiva, per ogni $z \in \mathbf{C} \setminus \Delta(0,R),\ R > 0$. Allora f è un polinomio di grado al piu' k.

Facciamo vedere che $f^{k+l}(0) = 0$, per ogni $l > 0$. Dalle stime di Cauchy e dalle ipotesi

$$|f^{k+l}(0)| \leq \frac{(k+l)!}{r^{k+l}} \sup_{\Delta(0,R)} |f| \leq \frac{(k+l)!}{r^{k+l}} M r^k = \frac{(k+l)!}{r^l} M.$$

Facendo tendere r a $+\infty$, si ha $f^{k+l}(0) = 0$, per ogni $l > 0$. Poiché f è data dalla somma di una serie di potenze centrata in 0, convergente su tutto $\mathbf{C}$, i cui coefficienti sono dati da $a_n = f^n(0)/n!$, si ha che le derivate di f di ordine $k+l,\ l > 0$, sono identicamente nulle. Da cui la tesi.

5. Sia f olomorfa e limitata su $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Far vedere che f è costante. (considerare la funzione $g(z) = z^2 f(z)$ e applicare l'esercizio precedente).

Consideriamo la funzione $g(z) = z^2 f(z)$. Per "costruzione", g è olomorfa su $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Inoltre

$$\lim_{z \to 0} g(z) = 0 \qquad \lim_{z \to 0} \frac{g(z) - 0}{z} = \lim_{z \to 0} z f(z) = 0.$$

Dunque g è olomorfa su tutto $\mathbf{C}$, con $g(0) = g'(0) = 0$. Dall'ipotesi di limitatezza di $|f|$ otteniamo

$$|g(z)| \leq \sup |f| |z|^2, \quad |z| \geq 1.$$

Dall'esercizio precedente e dal fatto che $g(0) = g'(0) = 0$, ssegue che $g(z) = az^2$ e che $f(z) \equiv a$. Osservazione: questo esercizio in realtà è artificiale, perch'e come vedremo in seguito f olomorfa e limitata su $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ è necessariamente olomorfa e limitata su tutto $\mathbf{C}$. Per cui rientra nelle ipotesi del teorema di Liouville.

6. Scrivere una funzione olomorfa $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ con infiniti zeri.

$f(z) = \sin z$. Gli zeri di f sono dati da $Z = \{z = x + iy \mid y = 0,\ x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

7. Scrivere una funzione olomorfa $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ sempre diversa da zero.

$f(z) = e^z$ sempre diversa da 0 su tutto $\mathbf{C}$.

8. Sia f una funzione olomorfa su un intorno del disco chiuso $\overline{\Delta(0,1)}$, non identicamente nulla su $\Delta(0,1)$. Allora f ha al piu' un numero finito di zeri in $\Delta(0,1)$.

Se f ha un insieme infinito di zeri in $\Delta(0,1)$, questo insieme ha un punto di accumulazione z_0 in $\overline{\Delta(0,1)}$. La dimostrazione del teorema degli zeri mostra che tutte le derivate di f in z_0 sono nulle e che lo sviluppo in serie di f in z_0 è dato dalla serie nulla. Di conseguenza f è identicamente nulla in un intorno di z_0. Per il principio di identità, f è identicamente nulla su tutta la componente connessa del dominio di f che contiene z_0. Questo esclude intanto che possa essere $z_0 \in \Delta(0,1)$. In realtà è anche escluso che $z_0 \in \partial\Delta(0,1)$: se f è olomorfa in un intorno Ω di $\overline{\Delta(0,1)}$, esiste un dischetto $\Delta(z_0, r)$, con $r > 0$, su cui f è olomorfa. Per quanto detto sopra, f è identicamente nulla su $\Delta(z_0, r)$. Poiché $\Delta(z_0, r) \cap \Delta(0,1) \neq \emptyset$, segue che f è identicamente nulla su $\Delta(0,1)$. Assurdo.

9. Sia $f(z) = \sin(\frac{1}{1-z})$, olomorfa sul disco $\Delta(0,1)$. Chi sono gli zeri di f? Confrontare con l'esercizio precedente.

La funzione $f(z) = \sin(\frac{1}{1-z})$ è olomorfa su $\mathbf{C} \setminus \{1\}$. L'insieme degli zeri di f è dato da $Z = \{1 - \frac{1}{\pi n} \mid n \in \mathbf{N}\} \subset \Delta(0,1)$. L'insieme Z è un sottoinsieme infinito, con punto di accumulazione $z = 1$. La differenza col caso precedente sta nel fatto che $z = 1$, il punto di accumulazione di Z, è singolare e lo sviluppo in serie di f intorno a $z = 1$ non esiste. Quindi non c'e' ragione perché f sia identicamente nulla su un (qualunque) aperto connesso contente Z (ed infatti non lo è).

10. Sia $\Omega \subset \mathbf{C}$ aperto connesso. Siano $f, g\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ olomorfe, tali che $f \cdot g \equiv 0$. Allora $f \equiv 0$ oppure $g \equiv 0$.

Supponiamo per esempio che $f \not\equiv 0$. Sia allora $p \in \Omega$, con $f(p) \neq 0$. Per continuità $f \neq 0$, per ogni $z \in \Delta(p, r)$, per qualche $r > 0$. Segue che deve essere $g \equiv 0$, su $\Delta(p, r)$. Poiché Ω è connesso, $g \equiv 0$ su tutto Ω.

11. Siano $f(z) = z^2 - 3z + 2$ e $g(z) = (2z+1)/(2z-1)$. Calcolare il massimo di $|f(z)|$ e di $|g(z)|$ su $\overline{\Delta(0,1)}$.

Le funzione f è olomorfa su tutto $\mathbf{C}$. Poiché $\overline{\Delta(0,1)}$ è relativamente compatto, per il principio del massimo modulo $|f|$ assume il suo massimo su $\partial\Delta(0,1)$. In un modo o nell'altro si calcola.
Le funzione g è olomorfa su $\mathbf{C} \setminus \{1/2\}$. In particolare è illimitata su $\overline{\Delta(0,1)}$.

12. Sia $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ olomorfa, tale che $|f(z)| \leq |e^z|$, per ogni $z \in \mathbf{C}$. Cosa si puo' dire su f?

Osserviamo innanzitutto che $e^z \neq 0$, per ogni $z \in \mathbf{C}$. Di conseguenza la funzione $g(z) = f(z)/e^z$ è olomorfa su tutto $\mathbf{C}$ ed è limitata in modulo

$$|g(z)| = |f(z)/e^z| \leq 1, \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

Per il teorema di Liouville, $g \equiv c$ è costante e $f(z) = ce^z$.

13. Sia $f\colon \Delta(0,1) \longrightarrow \Delta(0,1)$ un automorfismo del disco unità, diverso dall'identità.
   (a) Sia $f(0) = 0$. Allora 0 è l'unico punto fisso di f.
   (b) Se f ha un punto fisso in $\Delta(0,1)$, allora è necessariamente unico. (usare il fatto che $Aut(\Delta(0,1))$ opera transitivamente su $\Delta(0,1)$: dati due punti arbitrari $z, w \in \Delta(0,1)$, esiste $g \in Aut(\Delta(0,1))$, tale che $g(z) = w$).

(a) Sia $z_0 \neq 0$ un altro punto fisso di f in Δ. Allora $|f(z_0)| = |z_0|$. Per il Lemma di Schwarz f è costante. (b) Sia $a \neq 0$ il punto fisso di f. Poiché $Aut(\Delta(0,1))$ opera transitivamente su $\Delta(0,1)$, esiste $g \in Aut(\Delta(0,1))$, tale che $a = g(0)$. Allora

$$f(a) = a \Leftrightarrow f(g(0)) = g(0) \Leftrightarrow g^{-1}fg(0) = 0.$$

Per il punto precedente, l'esistenza di un secondo punto fisso per $g^{-1}fg$ implica $g^{-1}fg$ costante. D'altra parte $g^{-1}fg(b) = b$, per qualche $b \neq 0$, se e solo se $f(g(b)) = g(b)$, ossia se e solo se anche f ha un secondo punto fisso ($g(b) \neq a$). Poiché $g^{-1}fg$ costante implica f costante, anche il punto (b) è dimostrato.