1. Sia $\{z_n = x_n + iy_n\}$ una successione di numeri complessi e sia $z_0 = x_0 + iy_0$. Far vedere che $z_n \longrightarrow z_0$ se e solo se $\begin{cases} x_n \longrightarrow x_0 \\ y_n \longrightarrow y_0. \end{cases}$

Poiché $|z_n - z_0|^2 = |x_n - x_0|^2 + |y_n - y_0|^2$, si ha che

$$|z_n - z_0| < \epsilon, \quad \forall\, n > N_0 = N_0(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |x_n - x_0| < \epsilon \\ |y_n - y_0| < \epsilon \end{cases}, \quad \forall\, n > N_0.$$

Viceversa,

$$\begin{cases} |x_n - x_0| < \epsilon/\sqrt{2} \\ |y_n - y_0| < \epsilon/\sqrt{2} \end{cases}, \quad \forall\, n > N_0 = N_0(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad |z_n - z_0| < \epsilon, \quad \forall\, n > N_0.$$

Da cui la tesi.

2. Determinare il comportamento delle successioni $\{z_n = (\frac{3}{4} + i\frac{2}{3})^n\}$ e $\{z_n = \frac{1}{5}\frac{1}{(2+i\sqrt{3})^n}\}$.

$|\frac{3}{4} + i\frac{2}{3}|^2 = \frac{145}{144} > 1$. Quindi $|z_n| \longrightarrow +\infty$ e la successione $\{z_n = (\frac{3}{4} + i\frac{2}{3})^n\}$ diverge.
$|\frac{1}{5}\frac{1}{(2+i\sqrt{3})}|^2 = \frac{1}{25}\frac{1}{7} < 1$. Quindi $|z_n| \longrightarrow 0$ e la successione $\{z_n = \frac{1}{5}\frac{1}{(2+i\sqrt{3})^n}\}$ converge a 0.

3. Consideriamo la proiezione stereografica $\pi_{S^2,\mathbf{C}}\colon S^2 \longrightarrow \mathbf{C}$.
   (a) Far vedere che z, w sono immagini di punti diametralmente opposti di S^2 se e solo se $\bar{z} = -\frac{1}{w}$.
   (b) Determinare l'immagine in $\mathbf{C}$ del meridiano dato dall'intersezione della sfera col piano $x + 2y = 0$.
   (c) Determinare l'immagine in $\mathbf{C}$ del parallelo dato dall'intersezione della sfera col piano $z = 1/2$.

La proiezione stereografica $\pi_{S^2,\mathbf{C}}\colon S^2 \longrightarrow \mathbf{C}$ è data da $\pi_{S^2,\mathbf{C}}(a,b,c) = \frac{a}{1-c} + i\frac{b}{1-c}$.
Siano $z = \frac{a}{1-c} + i\frac{b}{1-c} = \pi_{S^2,\mathbf{C}}(a,b,c)$ e $w = \frac{-a}{1+c} - i\frac{b}{1+c} = \pi_{S^2,\mathbf{C}}(-a,-b,-c)$ immagini di punti diametralmente opposti in S^2. Allora

$$\bar{z}w = (\frac{a}{1-c} - i\frac{b}{1-c})(\frac{-a}{1+c} - i\frac{b}{1+c}) = -\frac{(a^2+b^2)}{(1-c^2)} = -1.$$

Viceversa, siano $z = \frac{a}{1-c} + i\frac{b}{1-c} = \pi_{S^2,\mathbf{C}}(a,b,c)$ e $w = \frac{d}{1-f} + i\frac{e}{1-f} = \pi_{S^2,\mathbf{C}}(d,e,f)$ e supponiamo che

$$\bar{z} = -\frac{1}{w}. \qquad (*)$$

Ne segue innanzitutto che

$$|z|^2 = \frac{1+c}{1-c} = \frac{1}{|w^2|} = \frac{1-f}{1+f} \quad \Leftrightarrow \quad f = -c.$$

Dopodiché la (*) diventa

$$\frac{a}{1-c} - i\frac{b}{1-c} = \frac{-d}{1+f} + i\frac{e}{1+f} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} d = -a \\ e = -b. \end{cases}$$

(b) Il piano $\pi: \quad x+2y=0$ è un piano verticale contenente l'asse z (in particolare contenente l'origine e il polo nord). L'immagine in $\mathbf{C}$ del meridiano $S^2\cap\pi$ è la retta per l'origine di equazione $x+2y=0$.

(c) L'intersezione della sfera col piano orizzontale $z=1/2$ è un cerchio in S^2 che non contiene il polo nord:

$$\{(a,b,1/2) \mid a^2+b^2+1/4=1\}.$$

La sua immagine in $\mathbf{C}$ è il cerchio di centro 0 e raggio 3:

$$\pi_{S^2,\mathbf{C}}(a,b,1/2)=(2a+i2b), \qquad 4a^2+4b^2=4(1-1/4)=3.$$

4. Consideriamo l'applicazione $F\colon \mathbf{C}^* \longrightarrow \mathbf{C}^*$, $\; z\mapsto \frac{1}{z}$.
   (a) Far vedere che se $|z|<1$ allora $|F(z)|>1$ e che se $|z|>1$ allora $|F(z)|<1$.
   (b) Determinare i punti fissi $\{z\in\mathbf{C}^* \mid F(z)=z\}$.
   (c) Determinare l'immagine tramite F dell'insieme $\{z\in\mathbf{C}^* \mid |z-1|=1\}$.
   (d) Determinare l'immagine tramite F dell'insieme $\{z\in\mathbf{C}^* \mid |z-1|=1/2\}$.
   (e) Determinare l'immagine tramite F dell'insieme $\{z\in\mathbf{C}^* \mid |z-i|=1/2\}$.
   (f) Determinare l'immagine tramite F dell'insieme $\{z\in\mathbf{C}^* \mid 1/2<|z|<2\}$.
   (g) Determinare l'immagine tramite F dell'insieme $\{z\in\mathbf{C}^* \mid 2<|z|<3\}$.

Osserviamo che $F(z)=1/z$ è un biolomorfismo di $\mathbf{C}^*$ in sè, che $F\circ F=Id$ e che (vista sulla sfera di Riemann) F manda 0 in ∞ e ∞ in 0. Per dimostrare che per due insiemi A e B vale $F(A)=B$, basterà far vedere che $F(A)\subset B$ e $F(B)\subset A$.

(a) $|F(z)|=1/|z|<1 \quad\Leftrightarrow\quad |z|>1 \qquad$ e $\qquad |F(z)|=1/|z|>1 \quad\Leftrightarrow\quad |z|<1.$

(b) $F(z)=1/z=z \quad\Leftrightarrow\quad z^2=1 \quad\Leftrightarrow\quad z=\pm1.$

(c) Siano $A=\{z\in\mathbf{C}^* \mid |z-1|=1\}$ e $B=\{z\in\mathbf{C}^* \mid |w-1|=|w|\}$. Poiché

$$|z-1|=1 \quad\Rightarrow\quad |1/z-1|=\frac{|1-z|}{|z|}=\frac{1}{|z|},$$

si ha che $F(A)\subset B$. Viceversa,

$$|w-1|=|w| \quad\Rightarrow\quad |1/w-1|=\frac{|1-w|}{|w|}=1,$$

e dunque $F(B)\subset A$ e $F(A)=B$. I punti che soddisfano l'equazione $|w-1|=|w|$ sono i punti equidistanti dall'origine e dal punto 1. Scriviamo $w=u+iv$. Allora

$$|w-1|=|w| \Leftrightarrow |w-1|^2=|w|^2 \Leftrightarrow u=1/2.$$

L'insieme B è la retta verticale $u=1/2$.

(d) Siano $A=\{z\in\mathbf{C}^* \mid |z-1|=1/2\}$ e $B=\{z\in\mathbf{C}^* \mid 2|w-1|=|w|\}$. Poiché

$$|z-1|=1/2 \quad\Rightarrow\quad |1/z-1|=\frac{|1-z|}{|z|}=\frac{1}{2|z|},$$

si ha che $F(A)\subset B$. Viceversa,

$$2|w-1|=|w| \quad\Rightarrow\quad |1/w-1|=\frac{|1-w|}{2|w|}=1/2,$$

e dunque $F(B) \subset A$ e $F(A) = B$. Scriviamo $w = u + iv$. In questo caso

$$2|w-1| = |w| \Leftrightarrow 4|w-1|^2 = |w|^2 \Leftrightarrow 3(u^2+v^2) - 8u + 4 = 0.$$

L'insieme B è la circonferenza $(u-4/3)^2 + v^2 = 4/9$.

(e) Siano $A = \{z \in \mathbf{C}^* \mid |z-i| = 1/2\}$ e $B = \{z \in \mathbf{C}^* \mid 2|w+i| = |w|\}$. Osserviamo che $F(i) = -i$ e che $|1/z + i| = \frac{|1+iz|}{|z|} = \frac{|i||z-i|}{|z|} = \frac{1}{2|z|}$. Ragionando come sopra troviamo che $F(A) = B$. Scrivendo $w = u + iv$, troviamo

$$2|w+i| = |w| \Leftrightarrow 4|w+i|^2 = |w|^2 \Leftrightarrow 3(u^2+v^2) + 8v + 4 = 0.$$

L'insieme B è la circonferenza $u^2 + (v+4/3)^2 = 4/9$.

(e) L'immagine dell'insieme $\{z \in \mathbf{C}^* \mid 1/2 < |z| < 2\}$ è dato da $\{z \in \mathbf{C}^* \mid 1/2 < |z| < 2\}$:

$$\begin{cases} 1/2 < |z| \\ |z| < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1/|z| < 2 \\ 1/|z| > 1/2 \end{cases}.$$

(g) L'immagine dell'insieme $\{z \in \mathbf{C}^* \mid 2 < |z| < 3\}$ è dato da $\{z \in \mathbf{C}^* \mid 1/3 < |z| < 12\}$:

$$\begin{cases} 2 < |z| \\ |z| < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1/|z| < 1/2 \\ 1/|z| > 1/3 \end{cases}.$$

5. Siano $z, w \in \mathbf{C}$, con $\bar{z}w \neq 1$. Allora
$$\left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right| = 1$$
se e solo se $|z| = 1$ oppure $|w| = 1$.

$$\left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-w| = |1-\bar{z}w| \Leftrightarrow |z-w|^2 = |1-\bar{z}w|^2 \Leftrightarrow (|z|^2-1)(1-|w|^2) = 0.$$

Da cui la tesi.

6. Sia $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ un polinomio tale che $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$, per ogni $z \in \mathbf{C}$.
   (a) Dimostrare che $F(z, \bar{z}) = zP(\bar{z}) + Q(\bar{z})$, dove P e Q sono polinomi in $\bar{z}$.
   (b) Se vale anche $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$, cosa si può dire su F?

(a) Integrando due volte rispetto a z, dall'equazione $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$, troviamo:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = P(\bar{z}), \qquad F(z, \bar{z}) = zP(\bar{z}) + Q(\bar{z}).$$

(b) Se vale anche $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$, il polinomio F è olomorfo. In particolare, $P(\bar{z}) = Q(\bar{z}) = \textit{costante}$. Infatti
$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = z\frac{\partial P}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial Q}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial \bar{z}} = -z\frac{\partial P}{\partial \bar{z}} \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial P}{\partial \bar{z}} = 0.$$

7. Sia $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ olomorfa. Dimostrare che se anche $\bar{F}$ è olomorfa, F è costante.

$F = u + iv$ è olomorfa se e solo se u e v soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann; $\bar{F} = u - iv$ è olomorfa se e solo se u e $-v$ soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann. Mettendo tutto insieme troviamo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial(-v)}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Da cui u e v costanti ed F costante.

8. Sia $u\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{R}$ di classe C^2 armonica. Allora $h(z) = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial u}{\partial x}$ è olomorfa.

Definiamo $U = \frac{\partial u}{\partial y}$ e $V = \frac{\partial u}{\partial x}$. Allora $h(z) = U(z) + iV(z)$ è olomorfa se e solo se U e V soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann. La prima condizione di C.R. è soddisfatta perché u è di classe C^2.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

La seconda condizione di C.R. è soddisfatta perché u è armonica.

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} \Leftrightarrow u \text{ armonica.}$$

9. Sia $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ armonica. Allora anche $\bar{F}$ è armonica.

Per definizione, $F = u + iv\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ è armonica se e solo se u e v sono armoniche. Ciò equivale a $\bar{F} = u - iv$ armonica.

10. Sia $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ olomorfa e non nulla. Allora $\log|F|$ è armonica.

$\Delta = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

$$\Delta \log|F| = 2\Delta \log F(z)\overline{F(z)} = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{F(z)\overline{F(z)}}\frac{\partial F}{\partial z}\bar{F}\right) = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{F(z)\overline{F(z)}}\right)\frac{\partial F}{\partial z}\bar{F} + \frac{1}{F(z)\overline{F(z)}}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}}$$

$$= -\left(\frac{1}{F(z)\overline{F(z)}}\right)^2 F\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}}\frac{\partial F}{\partial z}\bar{F} + \frac{1}{F(z)\overline{F(z)}}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}} = 0.$$

11. Sia $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ olomorfa. Allora

$$\Delta(|F|^2) = 4\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|^2.$$

$$\Delta|F(z)|^2 = \Delta F(z)\overline{F(z)} = 4\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\bar{F} + F\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}}\right) = 4\frac{\partial}{\partial z}\left(F\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}}\right) = 4\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}} + F\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}}\right).$$

Poiché $\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial F}{\partial z}}$ e $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}} = 0$, si ha la tesi.

12. Sia $A = \{z \in \mathbf{C} \mid \pi/4 < \mathrm{Im} z < \pi\}$.
    (a) Dimostrare che la funzione esponenziale $f(z) = e^z$ ristretta ad A è iniettiva.
    (b) Sia $A' = f(A)$. Determinare gli altri sottoinsiemi $B \subset \mathbf{C}$, tali che $f(B) = A'$.
    (c) Determinare se $1 + i$ e $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ appartengono ad A'.

(d) Fissare $\log w$, $w \in A'$, una determinazione del logaritmo su A'. Far vedere che $w_0 = 2 + i2\sqrt{3} \in A'$ e calcolare $\log w_0$.

(a) Siano $z = x + iy$, $w = u + iv \in A$. Si ha

$$e^z = e^w \Leftrightarrow e^{z-w} = 1 \Leftrightarrow e^{x-u}(\cos(y-v) + i\sin(y-v)) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-u}\cos(y-v) = 1 \\ e^{x-u}\sin(y-v) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(y-v) = 0 \\ e^{x-u}\cos(y-v) = 1. \end{cases}$$

L'equazione $\sin(y-v) = 0$, equivalente a $y - v \equiv 0 \mod \pi$, insieme a $\pi/4 < y, v < \pi$, implica $y = v$. Da cui $e^{x-u}\cos(y-v) = e^{x-u} = 1 \Leftrightarrow x = u$. In conclusione la funzione $f(z) = e^z$ ristretta ad A è iniettiva.

(b) $A' = f(A) = \{w \in \mathbf{C}^* \mid w = |w|e^{i\theta},\ \pi/4 < \theta < \pi\}$.
Per ogni $k \in \mathbf{Z}$, l'insieme

$$B_k = \{z \in \mathbf{C} \mid \pi/4 + 2\pi k < \mathrm{Im} z < \pi + 2\pi k\}$$

soddisfa $f(B_k) = A'$.

(c) Poiché $1 + i = \sqrt{2}(1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, si ha che $1 + i \notin A'$; invece $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3} \in A'$.

(d) Le restrizioni della funzione esponenziale $\exp\colon A \longrightarrow A'$ e $\exp\colon B_k \longrightarrow A'$ sono iniettive. Dunque esistono le inverse $\log\colon A' \longrightarrow A$ e $\log\colon A' \longrightarrow B_k$. Una determinazione del logaritmo su A' non è altro che la scelta di una di queste inverse. Fissiamo per esempio la seguente determinazione del logaritmo

$$w \in \mathbf{C}^*, \quad \log w = \log_n |w| + i \arg w, \quad \arg w \in [2\pi, 4\pi[.$$

Su A', essa corrisponde a scegliere $\log\colon A' \longrightarrow B_1$. Il punto $w_0 = 2 + i2\sqrt{3} = 4(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 4e^{i\pi/3} \in A'$. Scegliendo questa determinazione del logaritmo $\log w_0 = \log_n 4 + i(\pi/3 + 2\pi)$. Fra le infinite soluzioni dell'equazione $w_0 = e^z$ (la funzione e^z è periodica) abbiamo scelto quella della forma $z = \log_n |w| + i\theta$, con θ nell'intervallo $[2\pi, 4\pi[$.

13. Sia $A = \{z \in \mathbf{C} \mid -\pi/4 < \arg z < \pi/2\}$. Sia $f(z) = z^{1/4}$.
   (a) Determinare i sottoinsiemi $B \subset \mathbf{C}$, tali che $f(B) = A$.
   (b) Fissata su A la determinazione di f che soddisfa $f(1) = -i$, dare un'espressione analitica di f e verificare che soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann.
   (c) Calcolare $f(1+i)$ ed $f(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

(a) I sottoinsiemi $B \subset \mathbf{C}$, tali che $f(B) = A$ sono

$$B_0 = \{-\pi/16 < \arg z < \pi/8\} \qquad B_1 = \{-\pi/16 + \pi/2 < \arg z < \pi/8 + \pi/2\}$$

$$B_2 = \{-\pi/16 + \pi < \arg z < \pi/8 + \pi\} \qquad B_3 = \{-\pi/16 + 3\pi/2 < \arg z < \pi/8 + 3\pi/2\}.$$

(b) La determinazione di f che soddisfa $f(1) = -i$ è data da

$$f\colon A \longrightarrow B_3, \quad z = |z|e^{i\theta} \mapsto |z|^{1/4}e^{i(\theta/4 + 3\pi/2)}.$$

Verifichiamo che questa funzione soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari (cf. Sarason):

$$|z| = \rho, \quad f(\rho, \theta) = \rho^{1/4} e^{i(\theta/4 + 3\pi/2)} = \rho^{1/4} \cos(\theta/4 + 3\pi/2) + i\rho^{1/4} \sin(\theta/4 + 3\pi/2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{4}\rho^{-3/4}(\cos(\theta/4 + 3\pi/2)\cos\theta + \sin(\theta/4 + 3\pi/2)\sin\theta);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{4}\rho^{-3/4}(\cos(\theta/4 + 3\pi/2)\sin\theta - \sin(\theta/4 + 3\pi/2)\cos\theta).$$

(c) Scriviamo $1 + i = \sqrt{2}(1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Allora $f(1+i) = (\sqrt{2})^{1/4} e^{i(\pi/16 + 3\pi/2)} = 2^{1/8} e^{i25\pi/16}$. Per $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$ abbiamo $f(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = e^{i(\pi/12 + 3\pi/2)} = e^{i19\pi/12}$