1. Determinare il raggio di convergenza delle serie

$$\sum_n n! z^n \qquad \sum_n \frac{z^n}{n!} \qquad \sum_n n! z^{n!} \qquad \sum_n z^{n!} \qquad \sum_n n^n z^{n^2}$$

$$\sum_n n! z^n \qquad a_n = n! \qquad \lim_n (n!)^{1/n} = +\infty \qquad R = 0$$

$$\sum_n \frac{z^n}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{n!} \qquad \lim_n (\frac{1}{n!})^{1/n} = 0 \qquad R = +\infty$$

$$\sum_n n! z^{n!} \qquad a_m = \begin{cases} n! & m = n! \\ 0 & m \neq n! \end{cases} \qquad \limsup_m (a_m)^{1/m} = 1 \qquad R = 1$$

$$\sum_n z^{n!} \qquad a_m = \begin{cases} 1 & m = n! \\ 0 & m \neq n! \end{cases} \qquad \limsup_m (a_m)^{1/m} = 1 \qquad R = 1$$

$$\sum_n n^n z^{n^2} \qquad a_m = \begin{cases} n^n & m = n^2 \\ 0 & m \neq n^2 \end{cases} \qquad \limsup_m (a_m)^{1/m} = 1 \qquad R = 1$$

2. Determinare il raggio di convergenza delle serie

$$\sum_n \frac{z^n}{n(n+1)} \qquad \sum_n \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$$

Dove convergono uniformemente? Cosa si puo' dire delle serie derivate?

$$\sum_n \frac{z^n}{n(n+1)} \qquad a_n = \frac{1}{n(n+1)} \qquad \lim_n (a_n)^{1/n} = 1 \qquad R = 1$$

la serie converge uniformemente su $\Delta(0,1)$; la serie derivata $\sum_n \frac{z^n}{(n+1)}$ ha lo stesso raggio di convergenza, ma diverge ad esempio in $z = 1$.

$$\sum_n \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}} \qquad a_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \qquad \lim_n (a_n)^{1/n} = 1 \qquad R = 1$$

la serie converge uniformemente su $\Delta(0,1)$; la serie derivata $\sum_n \frac{z^n}{\sqrt{n+1}}$ ha lo stesso raggio di convergenza, ma diverge ad esempio in $z = 1$.

3. Date le serie

$$\sum_n z^n \qquad \sum_n \frac{(z+i)^n}{(1+i)^{n+1}}$$

dire dove convergono e confrontare le loro somme.

La prima serie converge su $\Delta(0,1)$, con somma $\sum_n z^n = \frac{1}{1-z}$. La seconda serie converge su $\Delta(-i, \sqrt{2}) = \{|\frac{z+i}{1+i}| < 1\}$, con somma $\sum_n \frac{(z+i)^n}{(1+i)^{n+1}} = \frac{1}{1-z}$. La funzione $f(z) = \frac{1}{1-z}$ è olomorfa su

$\mathbf{C} \setminus \{1\}$: la prima serie è la sua espansione in serie di Taylor centrata in $z = 0$, la seconda è la sua espansione in serie di Taylor centrata in $z = -i$. I raggi di convergenza delle due serie coincidono rispettivamente con la distanza di $z = 0$ e di $z = -i$ dal punto singolare $z = 1$.

4. Determinare dominio di convergenza e somma della serie

$$1 + z + z^2 + z^4 + z^6 + z^8 + \dots.$$

$1 + z + z^2 + z^4 + z^6 + z^8 + \ldots = z + \sum_{n \geq 0} z^{2n} = z + \frac{1}{1-z^2}$ su $\Delta(0,1)$.

5. Sia $\sum_n a_n z^n$ una serie con raggio di convergenza R, calcolare il raggio di convergenza delle serie

$$\sum_n a_n^2 z^n \qquad \sum_n a_n z^{2n} \qquad \sum_n a_n^2 z^{2n}$$

(vedi tutorato)

6. Sia $\sum_n a_n z^n$ una serie con raggio di convergenza R, e sia $\sum_n b_n z^n$ una serie per cui vale

$$|b_n| < n^2 |a_n|, \quad \forall n.$$

Far vedere che anche $\sum_n b_n z^n$ converge assolutamente per ogni z, con $|z| < R$.

Le serie $\sum_n a_n z^n$ e $\sum_n n^2 a_n z^n$ hanno lo stesso raggio di convergenza R.

$$|b_n| < n^2 |a_n| \Rightarrow \sum_n |b_n||z|^n < \sum_n (n^2)|a_n||z|^n < +\infty, \quad |z| < R.$$