1. *Sia* $f(z) = z^5 - 3iz + 62$ *e sia* C *una circonferenza (percorsa una volta in senso antiorario) che racchiude tutti gli zeri di* f. *Calcolare*

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Per il principio dell'argomento, $\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(Z-P)$, dove Z e P sono rispettivamente il numero di zeri e il numero di poli di f racchiusi dalla curva C (contati con la loro molteplicità). Per ipotesi le 5 radici del polinomio stanno tutte all'interno di C, da cui $\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 10\pi i$.

2. *Sia* $f(z) = \frac{(z^2+1)^2}{(z^2+2z+2)^3}$ *e sia* $C = \{|z| = 4\}$ *(percorsa una volta in senso antiorario). Calcolare*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

I poli di f sono le due radici del polinomio $q(z) = (z^2 + 2z + 2)^3$, cioè $P_1 = -1 + i$ e $P_2 = -1 - i$. Hanno molteplicità 3 ciascuno e si trovano all'interno di C. Gli zeri di f sono le due radici del polinomio $p(z) = (z^2 + 1)^2$, cioè $Z_1 = i$ e $Z_2 = -i$. Hanno molteplicità 2 ciascuno e si trovano all'interno di C. Segue che $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -2$.

3. *Siano* f, g *funzioni olomorfe sul disco unità e continue sulla circonferenza unitaria* γ *(percorsa una volta in senso antiorario). Supponiamo che* f *si annulli nei punti* $P_1, \ldots, P_k$ *dentro il disco e che sia diversa da zero su* γ. *Calcolare*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

La funzione $F(z) = g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ è olomorfa sul disco unità, esclusi i punti dove f si annulla, e continua sulla circonferenza γ. Per il teorema dei residui,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F(z) dz = \sum_{i=1}^{k} Res_F(P_i) = \sum_{i=1}^{k} g(P_i) Res_{f'/f}(P_i) = \sum_{i=1}^{k} g(P_i) m_i,$$

dove m_i è l'ordine di P_i come zero di f.

4. *Sia* $f(z) = z^4 - 2z^3 + z^2 - 12z + 20$. *Calcolare*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \qquad \gamma = \{z = 5e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Applicando quanto detto sopra a $g(z) = z$ ed $f(z) = z^4 - 2z^3 + z^2 - 12z + 20$, troviamo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^{4} P_i m_i.$$

Gli zeri di f sono $P_1 = P_2 = 2$, $P_3 = -1 + 2i$, $P_4 = -1 - 2i$, per cui il valore dell'integrale risulta $2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1 + 2i) + 1 \cdot (-1 - 2i) = 2$.

5. *Far vedere che tutte le radici di $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ si trovano nell'anello $A = \{z \in \mathbf{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.*

Siano $f(z) = z^7 - 5z^3 + 12$, $g(z) = 12$ e $h(z) = f(z) - g(z) = z^7 - 5z^3$. Se $|z| = 1$, vale la maggiorazione

$$|h(z)| = |z^7 - 5z^3| \leq |z^7| + |5z^3| \leq 6 < 12 = |g(z)|.$$

Per il teorema di Rouché, f (come g) non ha zeri nel disco $\Delta(0,1)$. Consideriamo adesso le funzioni $g(z) = z^7$ e $h(z) = f(z) - g(z) = 12 - 5z^3$. Se $|z| = 2$, vale la maggiorazione

$$|h(z)| \leq 12 + |-5z^3| \leq 52 < 2^7 = |z^7| = |g(z)|.$$

Per il teorema di Rouché, f (come g) ha 7 zeri nel disco $\Delta(0,2)$ e dunque nell'anello $A = \{z \in \mathbf{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

6. *Sia $p(z) = z^5 + z^3 + 5z^2 + 2$. Quante radici ha p nell'anello $A = \{z \in \mathbf{C} \mid 1 < |z| < 2\}$?*

Sia $g(z) = 5z^2 + 2$. Se $|z| = 1$, vale la maggiorazione

$$|P(z) - g(z)| = |z^5 + z^3| \leq 2 < 3 \leq |5z^2 + 2| = |g(z)|.$$

Per il teorema di Rouché, p (come g) ha 2 zeri nel disco $\Delta(0,1)$. Consideriamo adesso le funzioni $g(z) = z^5 + z^3 + 5z^2 = z^2(z^3 + z + 5)$ e $h(z) = p(z) - g(z) = 2$. Se $|z| = 2$, vale la maggiorazione

$$|p(z) - g(z)| = 2 < 4 \leq |z^2(z^3 + z + 5)| = |g(z)|.$$

Per il teorema di Rouché, p ha lo stesso numero di zeri di g nel disco $\Delta(0,2)$. D'altra parte, se $|z| = 2$, vale la maggiorazione $5 < 6 \leq |z^3 + z|$. Di conseguenza, g ha 2 zeri nel disco $\Delta(0,2)$. In conclusione, p non ha zeri nell'anello $A = \{z \in \mathbf{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

7. *Far vedere che l'equazione $az^n = e^z$ ha n soluzioni nel disco unità, per ogni $a > e$.*

Consideriamo $f(z) = az^n - e^z$ e $g(z) = az^n$. Se $|z| = 1$, vale la maggiorazione

$$|f(z) - g(z)| = |e^z| = e^x \leq e < a = |az^n| = |g(z)|.$$

Di conseguenza f e g hanno entrambe n zeri nel disco $\Delta(0,1)$.

8. *Far vedere che l'equazione $ze^z = a$ ha infinite soluzioni, per ogni $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.*

9. *Far vedere che l'equazione $z \tan z = a$ ha infinite soluzioni reali e nessuna soluzione immaginaria, per ogni $a > 0$.*

Per $x \in \mathbf{R}^+$, l'equazione $\tan x = \frac{a}{x}$ ha infinite soluzioni. Ponendo $z = it$, si trova $-t\frac{\sinh t}{\cosh t} = a$, che non ha soluzioni se $a > 0$.

10. *Sia $f(z) = z^2 e^z - z$. Quanti zeri ha f nel disco $\Delta(0,2)$?*