1. Considerare la successione di gruppi abeliani

$$\ldots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \longrightarrow \ldots$$

   di Hatcher, Thm 2.16, pag.117. Dimostrare che $\ker(i_*) = \mathrm{Im}(\partial)$.

2. Verificare che i gruppi di *omologia ridotta* (ottenuti dal complesso delle catene singolari *esteso*) di un punto sono tutti nulli.

3. Sia X uno spazio non vuoto. Verificare che $H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbf{Z}$.

4. Svolgere in dettaglio gli esempi 2.17 e 2.18 a pag. 118 di Hatcher.

5. Nel seguente diagramma commutativo le due righe sono esatte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow f & & \big\downarrow g & & \big\downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

   (a) Dimostrare che se f è suriettiva e g è iniettiva, allora h è iniettiva.
   (b) Dimostrare che se g è suriettiva e h è iniettiva, allora f è suriettiva.

6. Siano A, B, C, D, A', B', C' e D' gruppi abeliani. Nel seguente diagramma commutativo le due righe sono esatte

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\phi} & B & \xrightarrow{\psi} & C & \xrightarrow{\chi} & D \\ \big\downarrow f & & \big\downarrow g & & \big\downarrow h & & \big\downarrow k \\ A' & \xrightarrow{\phi'} & B' & \xrightarrow{\psi'} & C' & \xrightarrow{\chi'} & D'. \end{array}$$

   Dimostrare che se f è suriettiva e g e k sono iniettive, allora h è iniettiva.

7. Sia

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_n \longrightarrow 0$$

   una successione esatta di gruppi abeliani finiti. Dimostrare che $\prod_{i=1}^n \# A_i^{(-1)^i} = 1$.