1. *Considerare la successione di gruppi abeliani*

$$\ldots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \longrightarrow \ldots$$

di Hatcher, Thm 2.16, pag.117. Dimostrare che $\ker(i_*) = \mathrm{Im}(\partial)$.

Sol.: Vedi libro.

2. *Verificare che i gruppi di omologia ridotta (ottenuti dal complesso delle catene singolari esteso) di un punto sono tutti nulli.*

Sol.: Sia $X = \{p\}$ lo spazio costituito dal solo punto p. Consideriamo il complesso esteso di catene

$$\ldots \longrightarrow C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots$$

$$\ldots C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

dove, per ogni $i \geq 0$, lo spazio $C_i(X) \cong \mathbf{Z}\sigma^i$ è generato dalla i-catena costante $\sigma^i\colon \Delta^i \to p$ con immagine p, ed $\epsilon\colon C_0(X) \to \mathbf{Z}$ è l'omomorfismo dato da

$$\sigma = m\sigma^0 \mapsto \epsilon(\sigma) = m.$$

Vale $\epsilon \circ \partial_1 = 0$: infatti data $\eta = l\sigma^1 \in C_1(X)$, con $l \in \mathbf{Z}$, abbiamo

$$\epsilon\partial_1(\eta) = \epsilon(l\sigma^1|v_1 - l\sigma^1|v_0) = l - l = 0.$$

Per costruzione

$$\widetilde{H}_n(X) = H_n(X) = 0, \quad \forall n > 0.$$

Resta da verificare che $\widetilde{H}_0(X) = 0$: poiché $\partial_1 C_1(X) \equiv 0$, è evidente che

$$\widetilde{H}_0(X) = \ker\epsilon/\partial_1 C_1(X) = \ker\epsilon = \{0\}.$$

3. *Sia X uno spazio non vuoto. Verificare che $H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbf{Z}$.*

Sol.: Consideriamo l'omomorfismo

$$\epsilon\colon C_0(X) \to \mathbf{Z}, \quad \sigma = \sum_i m_i\sigma_i^0 \mapsto \sum_i m_i, \qquad m_i \in \mathbf{Z},\ \sigma_i^0\colon \Delta^0 \to X.$$

La successione di gruppi abeliani (ι è l'inclusione)

$$0 \longrightarrow \ker\epsilon \xrightarrow{\iota} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

è esatta. Come abbiamo già osservato ϵ è suriettiva: un intero $m \in \mathbf{Z}$ è immagine di $m\sigma^0$, con $\sigma^0\colon \Delta^0 \to X$.

Poiché $Im(\partial_1) \subset \ker(\epsilon) \subset C_0(X)$, la successione

$$0 \longrightarrow \ker \epsilon / Im(\partial_1) \xrightarrow{\bar{\iota}} C_0(X)/Im(\partial_1) \xrightarrow{\bar{\epsilon}} \mathbf{Z} \to 0$$

è ben definita ed esatta. In altre parole

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_0(X) \xrightarrow{\bar{\iota}} H_0(X) \xrightarrow{\bar{\epsilon}} \mathbf{Z} \to 0$$

è esatta. *Ogni successione esatta che termina in* $\mathbf{Z}$ *si spezza* (vedi Nota in basso), da cui segue che

$$H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbf{Z}.$$

4. *Svolgere in dettaglio gli esempi 2.17 e 2.18 a pag. 118 di Hatcher.*

Sol.: **Hatcher, esempio 2.17**
La successione esatta lunga di omologia estesa della coppia $(D^n, \partial D^n)$ è data da

$$\ldots \longrightarrow \widetilde{H}_{i+1}(D^n) \xrightarrow{j_*} \widetilde{H}_{i+1}(D^n, \partial D^n) \xrightarrow{\partial_{i+1}} \widetilde{H}_i(\partial D^n) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_i(D^n) \to \ldots \quad i \geq 0.$$

Il disco D^n è contrattile, quindi ha la stessa omologia estesa del punto $\widetilde{H}_i(D^n) \equiv 0$, per ogni i; il bordo del disco è diffeomorfo alla sfera $\partial D^n \cong S^{n-1}$, per cui $\widetilde{H}_{n-1}(\partial D^n) = \mathbf{Z}$, mentre $\widetilde{H}_i(\partial D^n) \equiv 0$, per ogni $i \neq n-1$. Ne segue che

$$H_{i+1}(D^n, \partial D^n) \xrightarrow{\partial_{i+1}} \widetilde{H}_i(\partial D^n)$$

è un isomorfismo per ogni i. Poiché l'omologia estesa della coppia coincide con l'omologia standard, vale

$$H_n(D^n, \partial D^n) = \mathbf{Z}, \qquad H_i(D^n, \partial D^n) \equiv 0, \ \forall i \neq n.$$

Hatcher, esempio 2.18 (vedi esercizi8, n. 1).

5. *Nel seguente diagramma commutativo le due righe sono esatte*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\phi} & B & \xrightarrow{\psi} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\phi'} & B' & \xrightarrow{\psi'} & C' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

   (a) Dimostrare che se f è suriettiva e g è iniettiva, allora h è iniettiva.
   (b) Dimostrare che se g è suriettiva e h è iniettiva, allora f è suriettiva.

Sol.: (a) Sia $c \in \ker h$:
- ψ suriettiva implica $c = \psi(b)$, per un $b \in B$;
- abbiamo $h(\psi(b)) = h(c) = 0$;
- per la commutatività del quadrato di destra, vale $\psi'(g(b)) = 0$;
- l'esattezza della successione in basso implica $g(b) \in \ker \psi' = Im\phi'$, da cui $g(b) = \phi'(a')$ per un $a' \in A'$;

- f suriettiva implica $a' = f(a)$, per un $a \in A$;
- per la commutatività del quadrato di sinistra, abbiamo $g(b) = \phi'(f(a)) = g(\phi(a)$;
- g iniettiva implica $b = \phi(a)$;
- l'esattezza della successione in alto implica $c = \psi(b) = \psi(\phi(a)) = 0$.
- *Dunque* $\ker h = \{0\}$, *come richiesto.*

(b) Sia a' un elemento arbitrario di A';
- $\phi'(a') \in B'$;
- g suriettiva implica $\phi'(a') = g(b)$, per un $b \in B$;
- l'esattezza della successione in basso implica $\psi'(\phi'(a')) = 0 = \psi'(g(b))$;
- la commutatività del quadrato di destra implica $0 = \psi'(g(b)) = h(\psi(b))$;
- h iniettiva implica $\phi(b) = 0$;
- l'esattezza della successione in basso implica $b \in \ker \psi = \Im \phi$, ossia $b = \phi(a)$, per un $a \in A$;
Verifichiamo che $a' = f(a)$:
- $a' = g(b) = g(\phi(a)) = \phi'(f(a))$ e ϕ' iniettiva implica $a' = \phi(a)$. - *Dunque* f *è suriettiva*, come richiesto.

6. *Siano A, B, C, D, A', B', C' e D' gruppi abeliani. Nel seguente diagramma commutativo le due righe sono esatte*

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\phi} & B & \xrightarrow{\psi} & C & \xrightarrow{\chi} & D \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow k \\ A' & \xrightarrow{\phi'} & B' & \xrightarrow{\psi'} & C' & \xrightarrow{\chi'} & D'. \end{array}$$

Dimostrare che se f è suriettiva e g e k sono iniettive, allora h è iniettiva.

Sol.: Sia $c \in \ker h$:
- $c \in \ker h$ implica $\chi'(h(c)) = 0$, cioè $h(c) \in \ker \chi' = Im(\psi')$, per l'esattezza della riga in basso; dunque $h(c = \psi'(b')$, per un $b' \in B'$;
- $c \in \ker h$ implica anche $\chi'(h(c)) = 0 = k(\chi(c))$, per la commutatività del quadrato a destra;
- k iniettiva implica $\chi(c) = 0$, cioè $c \in \ker \chi = Im(\psi)$, per l'esattezza della riga in alto: dunque $c = \psi(b)$, per un $b \in B$.
- da $h(\phi(b)) = 0 = \phi'(g(b))$, segue che $g(b) \in \ker \chi' = \Im(\phi')$, per l'esattezza della riga in basso: dunque $g(b) = \phi'(a')$;
- f suriettiva e la commutatività del quadrato a sinistra implicano $\phi'(a') = \phi'(f(a)) = g(\phi(a))$, per un $a \in A$;
- g iniettiva implica $b = \phi(a)$;
- infine $c = \psi(b) = \psi(\phi(a)) = 0$, per l'esattezza della riga in alto.
- *Dunque* $\ker h = \{0\}$, *come richiesto.*

7. *Sia*

$$0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_n \longrightarrow 0$$

una successione esatta di gruppi abeliani finiti. Dimostrare che $\prod_{i=1}^{n} \# A_i^{(-1)^i} = 1$.

Sol.: Vediamo qualche esempio:
$n = 2$

$$0 \to A_1 \to A_2 \to 0 \overset{?}{\Rightarrow} |A_1|^{-1}|A_2| = 1.$$

Poiché in questo caso l'esattezza della successione implica $A_1 \cong A_2$, vale anche $|A_1| = |A_2|$.

$n = 3$

$$0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0 \overset{?}{\Rightarrow} |A_1|^{-1}|A_2||A_3|^{-1} = 1.$$

Poiché in questo caso l'esattezza della successione implica $A_3 \cong A_2/A_1$, vale anche $|A_3| = |A_2|/|A_1|$.

Adesso procediamo per induzione e supponiamo di aver dimostrato la tesi per successioni esatte con $n-1$ termini.
Dall'esattezza della successione

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\phi_1} A_2 \xrightarrow{\phi_2} \cdots \xrightarrow{\phi_{n-1}} A_n \longrightarrow 0$$

il gruppo A_1 si immerge iniettivamente in A_2. Identifichiamo A_1 con la sua immagine $\phi_1(A_1)$ in A_2 e poniamo $B := A_2/A_1$. Abbiamo che le due successioni

$$0 \to A_1 \xrightarrow{\phi_1} A_2 \xrightarrow{\phi_2} B \to 0 \tag{$*$}$$

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\phi_2} A_3 \xrightarrow{\phi_3} \cdots \longrightarrow A_n \longrightarrow 0 \tag{$**$}$$

sono esatte. Osserviamo che la seconda successione ha $n-1$ termini. Dalle relazioni

$$|A_1|^{-1}|A_2||B|^{-1} = 1 \qquad |B|^{-1}|A_3|\dots|A_n|^{(-1)^{n-1}} = 1$$

la tesi per successioni esatte con n termini.

Nota. Sia

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

una successione esatta corta di gruppi abeliani. Allora i seguenti fatti sono equivalenti:

(1) Esiste ϕ che

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_1} & A \times C & \xrightarrow{p_2} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle Id_A} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle Id_C} & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

(2) esiste un omomorfismo $k: C \to B$ tale che $g \circ k = Id_C$;
(3) esiste un omomorfismo $h: B \to A$ tale che $h \circ f = Id_A$;

Dim.: Innanzitutto, dall'esattezza della successione originaria segue che

$$C \cong B/f(A).$$

Verifichiamo solo che (2) implica (1). Se esiste $k: C \to B$ tale che $g \circ k = Id_C$, allora un isomorfismo $\phi: A \times C \to B$ è dato da $\phi(a, c) = f(a) + k(c)$.
Si verifica immediatamente che ϕ è un omomorfismo;
ϕ è suriettivo: dato $b \in B$, costruiamo un elemento (a, c) che abbia immagine b. Poiché g è suriettiva, per ogni $c \in C$ esiste $b \in B$ tale che $g(b) = c$. Allora $\phi(0, g(b)) = 0 + k(g(b)) = b$;
ϕ è iniettivo: Sia (a, c) un elemento di $\ker \phi$, cioè tale che $f(a) + k(c) = 0$. Applicando g troviamo $g(f(a) + k(c)) = g(f(a)) + g(k(c)) = g(k(c)) = c = 0$. Allora $c = 0$ e $f(a) = 0$. Poiché f è iniettiva anche $a = 0$. Dunque $\ker \phi = 0$, come richiesto.

Esempio. Sia data

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathbf{Z} \longrightarrow 0.$$

Scegliamo un elemento $b \in B$ tale che $g(b) = 1$ e definiamo $k\colon \mathbf{Z} \to B$ mediante $k(1) = b$.

Esempio. Sia data

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathbf{Z}^r \longrightarrow 0.$$

Scegliamo elementi $b_1, \ldots, b_r \in B$ tali $g(b_i) = (0, \ldots, 1_i, \ldots, 0)$ e definiamo $k\colon \mathbf{Z} \to B$ mediante $k(0, \ldots, 1_i, \ldots, 0) = b_i$.

Esempio. Una successione esatta di spazi vettoriali

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} W/V \longrightarrow 0$$

si spezza sempre.

Esempio. La successione esatta di gruppi abeliani

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbf{Z}_4 \xrightarrow{g} \mathbf{Z}_2 \longrightarrow 0$$

non si spezza: infatti $\mathbf{Z}_4$ non è isomorfo a $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$.