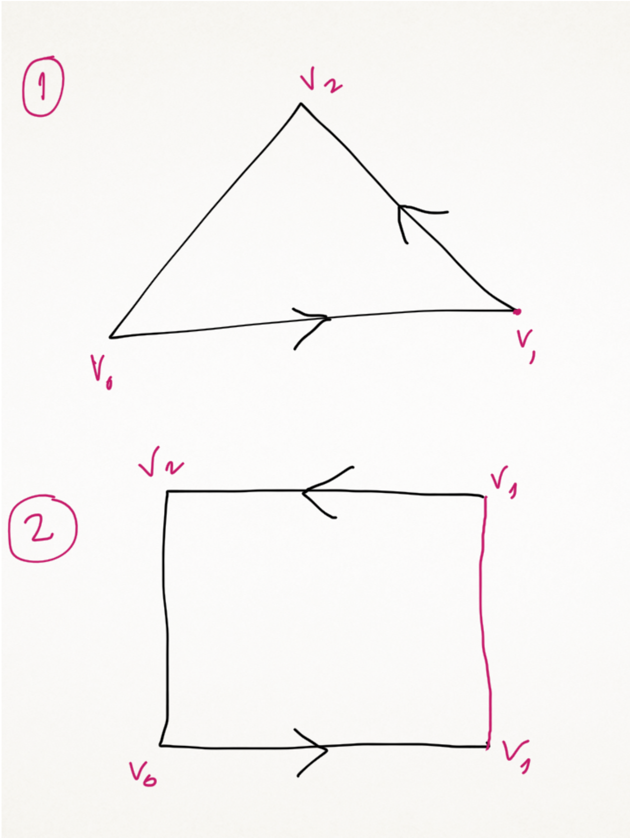
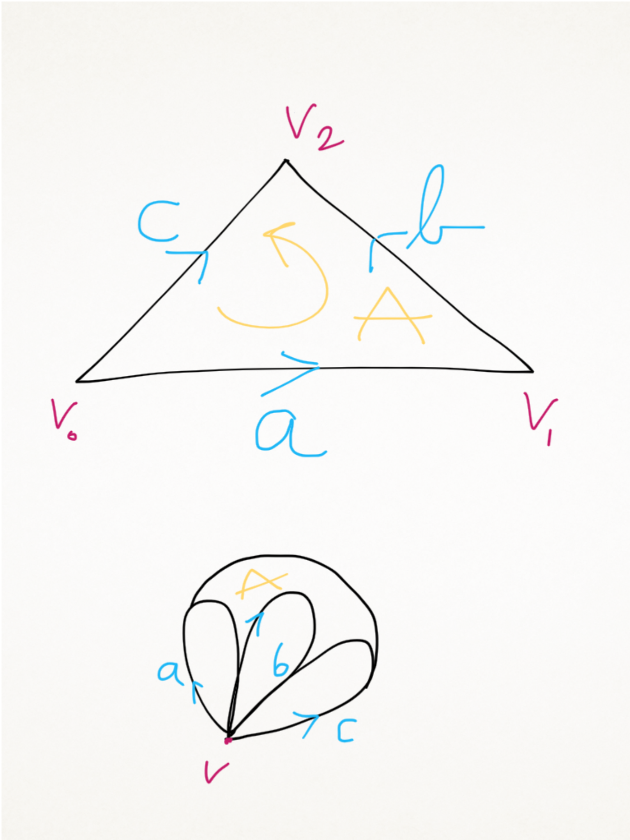
1. Hatcher, pag.131-132: Esercizi 1, 4, 6 (solo per n=0,1,2), 11.

Sol.: **Hatcher, esercizio 1, pag. 131**.



Lo spazio in figura (1) è omotopicamente equivalente allo spazio in figura (2), che è il nastro di Möbius.

Hatcher, esercizio 4, pag. 131.



Chiamiamo v il vertice ottenuto dalle identificazioni $v_0 = v_1 = v_2$. Con un abuso di linguaggio identifichiamo i simplessi che compongono la Δ-struttura di X con le rispettive funzioni caratteristiche

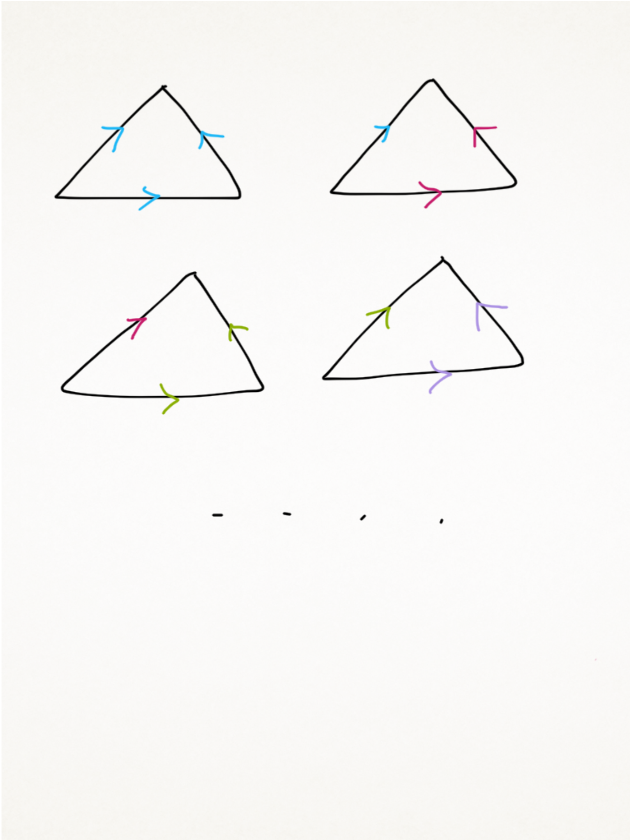
$$e^0 \colon \Delta^0 \to X,\ e^0(\Delta^0) = v, \qquad e_1^1 \colon \Delta^1 \to X,\ e_1^1(\Delta^1) = a, \qquad etc\dots.$$

Abbiamo

$$C_0(X) = \mathbf{Z}v, \qquad C_1(X) = \mathbf{Z}a \oplus \mathbf{Z}b \oplus \mathbf{Z}c, \qquad C_2(X) = \mathbf{Z}A;$$

$\partial_0 \equiv 0$;
$\partial_3 \equiv 0$, perché non ci sono celle di dimensione tre;
$\partial_1(a) = \partial_1(b) = \partial_1(c) = v - v = 0$;
$\partial_2(A) = a + b - c$ (vedi figura).
Di conseguenza
$H_0(X) = \ker \partial_0 / Im(\partial_1) = C_0(X) \cong \mathbf{Z}$;
$H_1(X) = \ker \partial_1 / Im(\partial_2) = C_1(X)/Im(\partial_2) \cong \mathbf{Z}a \oplus \mathbf{Z}b \oplus \mathbf{Z}c / \mathbf{Z}(a + b - c) \cong$
$\cong \mathbf{Z}a \oplus \mathbf{Z}b \oplus \mathbf{Z}(a + b - c)/\mathbf{Z}(a + b - c) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$;
$H_2(X) = \ker \partial_2 / Im(\partial_3) = 0$.
Tutti gli altri gruppi di omologia simpliciale sono nulli, non essendoci celle di dimensione diversa da $0, 1, 2$.

Hatcher, esercizio 6, pag. 131.



$n = 0$ (dunce hat): lo spazio ha una cella in ogni dimensione

$C_0(X) = \mathbf{Z}p$;
$C_1(X) = \mathbf{Z}a$;
$C_2(X) = \mathbf{Z}A$;

$\partial_0 \equiv 0$;
$\partial_1 \equiv 0$, perché tutti i vertici sono identificati;
$\partial_2(A) = a$;
$\partial_3 \equiv 0$.

Ne segue che

$$H_0(X) = C_0(X) \cong \mathbf{Z}, \quad H_1(X) = H_2(X) = 0.$$

Tutti gli altri gruppi di omologia simpliciale sono nulli, non essendoci celle di dimensione diversa da $0, 1, 2$.

$n = 1$: lo spazio ha una 0-cella, due 1-celle e due 2-celle

$C_0(X) = \mathbf{Z}p$;
$C_1(X) = \mathbf{Z}a \oplus \mathbf{Z}b$;
$C_2(X) = \mathbf{Z}A \oplus \mathbf{Z}B$;

$\partial_0 \equiv 0$;
$\partial_1 \equiv 0$;
$\partial_2(A) = a, \quad \partial_2(B) = 2b - a$;

$\ker \partial_2 = 0$: infatti

$$\partial_2(mA + nB) = ma + n(2b - a) = (m - n)a + 2nb = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m - n = 0 \\ n = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad m = n = 0.$$

$\partial_3 \equiv 0$.

Ne segue che

$$H_0(X) = C_0(X) \cong \mathbf{Z}, \quad H_2(X) = \ker \partial_2 = 0,$$

$$H_1(X) = C_1(X)/Im(\partial_2) = \mathbf{Z}a \oplus \mathbf{Z}b/\mathbf{Z}a \oplus \mathbf{Z}(2b - a) \cong \mathbf{Z}a \oplus \mathbf{Z}b/\mathbf{Z}a \oplus \mathbf{Z}2b \cong \mathbf{Z}_2.$$

$n = 2$: lo spazio ha una 0-cella, tre 1-celle e tre 2-celle

$C_0(X) = \mathbf{Z}p$;
$C_1(X) = \mathbf{Z}a \oplus \mathbf{Z}b \oplus \mathbf{Z}c$;
$C_2(X) = \mathbf{Z}A \oplus \mathbf{Z}B \oplus \mathbf{Z}C$;

$\partial_0 \equiv 0$;
$\partial_1 \equiv 0$;
$\partial_2(A) = a, \quad \partial_2(B) = 2b - a, \quad \partial_2(C) = 2c - b$;
$\ker \partial_2 = 0$: infatti

$$\partial_2(mA + nB + rC) = ma + n(2b - a) + r(2c - b) = (m - n)a + (2n - r)b + 2rc = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} m - n = 0 \\ 2n - r = 0 \\ r = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad m = n = r = 0.$$

$\partial_3 \equiv 0$.

Ne segue che

$$H_0(X) = C_0(X) \cong \mathbf{Z}, \quad H_2(X) = \ker \partial_2 = 0,$$

$$H_1(X) = C_1(X)/Im(\partial_2) = \mathbf{Z}a \oplus \mathbf{Z}b \oplus \mathbf{Z}c/\mathbf{Z}a + \mathbf{Z}(2b - a) + \mathbf{Z}(2c - b) \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}.$$

Per vedere l'ultimo isomorfismo a destra, osserviamo che $b = 2c$ e $a = 2b = 4c$, ossia $H_1(X)$ è generato da c e vale la relazione $4c = 0$.

Nel caso generale, si dimostra che lo spazio X_n ha una 0-cella, $n{+}1$ celle 1-dimensionali $a_0, a_1, \ldots, a_n$, ed $n + 1$ celle 2-dimensionali $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

$$H_0(X_n) = C_0(X_n) \cong \mathbf{Z}, \quad H_2(X) = \ker \partial_2 = 0,$$

$$H_1(X) = C_1(X)/Im(\partial_2) = \mathbf{Z}a_0 \oplus \mathbf{Z}a_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}a_n/\mathbf{Z}a_0 + \mathbf{Z}(2a_1 - a_0) + \ldots + \mathbf{Z}(2a_n - a_{n-1}) \cong \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}.$$

Tutti gli altri gruppi di omologia simpliciale sono nulli, non essendoci celle di dimensione diversa da $0, 1, 2$.

Osservazione. Lo spazio X è compatto per ogni $n \geq 0$.
Per $n = 0$, lo spazio X (dunce hat) ha l'omologia del punto: è stato dimostrato che è contrattile (John Dalbec).
Per $n = 1$, lo spazio X è il piano proiettivo.
Per $n \geq 2$, lo spazio X non è omeomorfo né omotopicamente equivalente ad una superficie topologica compatta: confrontare i gruppi di omologia di X con quelli delle superfici compatte.

Hatcher, esercizio 11, pag. 132. Siano $i\colon A \to X$ l'inclusione ed $r\colon X \to A$ una retrazione. La composizione $r \circ i$

$$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} A$$

è l'identità di A ed induce l'identità in omologia

$$Id_*\colon H_n(A) \to H_n(A).$$

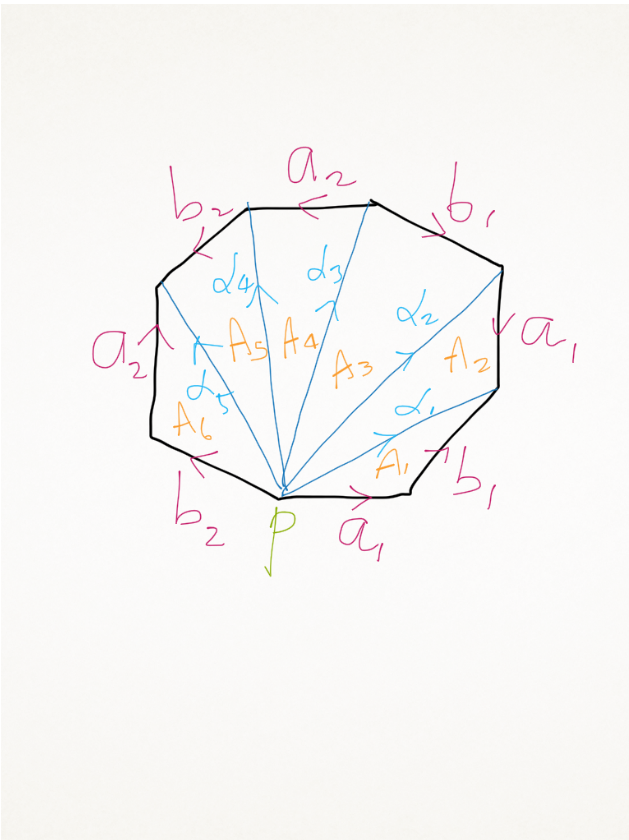
Poiché $Id_* = (r \circ i)_* = r_* \circ i_*$ è anche la composizione degli omomorfismi

$$H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{r_*} H_n(A),$$

segue che i_* è iniettivo.

2. *Calcolare l'omologia simpliciale di $T\#T$ con la struttura di Δ-complesso descritta nella figura a pag. 102 dell'Hatcher.*

Sol.:



Lo spazio ha una 0-cella, nove 1-celle e sei 2-celle

$C_0(X) = \mathbf{Z}p$;

$C_1(X) = \mathbf{Z}a_1 \oplus \mathbf{Z}b_i \oplus \mathbf{Z}\alpha_j, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \ldots, 5$;

$C_2(X) = \mathbf{Z}A_j, \quad j = 1, \ldots, 6$;

$\partial_0 \equiv 0$;

$\partial_1 \equiv 0$;
$\partial_2(A_1) = a_1 + b_1 - \alpha_1$;
$\partial_2(A_2) = \alpha_1 - a_1 - \alpha_2$;
$\partial_2(A_3) = \alpha_2 - b_1 - \alpha_3$;
$\partial_2(A_4) = \alpha_3 + a_2 - \alpha_4$;
$\partial_2(A_5) = \alpha_4 + b_2 - \alpha_5$;
$\partial_2(A_6) = \alpha_5 - a_2 - b_2$;
$\partial_3 \equiv 0$.
$\ker(\partial_2)$ è generato da $\sum_{j=1}^{6} A_j$.
Ne segue che

$$H_0(X) = C_0(X) \cong \mathbf{Z}, \quad H_2(X) = \ker \partial_2 = \mathbf{Z}(\sum_{j=1}^{6} A_j) \cong \mathbf{Z},$$

$$H_1(X) = C_1(X)/Im(\partial_2) = \ldots \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}.$$

Osservazione. I gruppi trovati coincidono con quelli calcolati usando un'altra Δ-struttura di $T\#T$: dall'isomorfismo fra omologia simpliciale e omologia singolare segue infatti che i gruppi di omologia simpliciale non dipendono dalla Δ-struttura dello spazio usata per calcolarli.