1. *Determinare tutti i rivestimenti di S^1. Verificare che sono normali e per ognuno di essi determinare il gruppo degli automorfismi di rivestimento (deck-transformations).*

2. *Determinare tutti i rivestimenti del toro $T = S^1 \times S^1$ e del cilindro $C = S^1 \times \mathbf{R}$. Verificare che sono normali e per ognuno di essi determinare il gruppo degli automorfismi di rivestimento (deck-transformations).*

Sol.: Sia X uno spazio che ammette rivestimento universale $\widetilde{X}$ e sia $x_0 \in X$. I rivestimenti di (X, x_0) sono in corrispondenza 1-1 con i sottogruppi di $\Pi_1(X, x_0)$: dato un sottogruppo $H \subset \Pi_1(X, x_0)$ esiste un rivestimento $p\colon (\widehat{X}_H, \hat{x}_0) \to (X, x_0)$ con la proprietà che

$$\Pi_1(\widehat{X}_H, \hat{x}_0) \cong p_*(\Pi_1(\widehat{X}_H, \hat{x}_0)) = H.$$

Lo spazio $\widehat{X}_H$ si ottiene come quoziente del rivestimento universale rispetto all'azione (propriamente discontinua senza punti fissi) di un gruppo isomorfo ad H:

$$\widehat{X}_H = \widetilde{X}/H.$$

Il rivestimento $p\colon (\widehat{X}_H, \hat{x}_0) \to (X, x_0)$ ha fibra di cardinalità $\#p^{-1}(x_0) = \#(\Pi_1(X, x_0)/H)$ e gruppo di automorfismi di rivestimento (deck-transformations) isomorfo a $N_{\Pi_1(X,x_0)}(H)/H$. Se H è normale in $\Pi_1(X, x_0)$ (per esempio se $\Pi_1(X, x_0)$ è abeliano), allora $N_{\Pi_1(X,x_0)}(H)/H = \Pi_1(X, x_0)/H$.

Applichiamo questi fatti ai tre spazi degli esercizi 1&2. Poiché S^1, C, T hanno gruppo fondamentale abeliano i rivestimenti che troviamo sono tutti normali.
(a) $X = S^1 = \{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t),\ t \in [0, 1]\}, \quad x_0 = 1 \in X, \quad \Pi_1(X, x_0) \cong \mathbf{Z}$.
I sottogruppi di $\mathbf{Z}$ sono dati da $H = m\mathbf{Z}$, con $m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, e dunque i rivestimenti di S^1 sono parametrizzati dagli interi non negativi

$$p\colon \widehat{X}_m \to X, \quad m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}.$$

Per $m = 0$, si trova il rivestimento universale $\widehat{X}_0 = \widetilde{X} = \mathbf{R}$

$$p\colon \mathbf{R} \to S^1, \quad t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t),$$

con fibra $p^{-1}(x_0) = \mathbf{Z}$. Il gruppo degli automorfismi di rivestimento è isomorfo a $\mathbf{Z}$ ed è dato dalle trasformazioni

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad t \mapsto t + k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Per $m > 0$, il rivestimento è dato da

$$p\colon S^1 \to S^1, \quad (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \mapsto (\cos 2\pi mt, \sin 2\pi mt)$$

ed ha fibra $p^{-1}(x_0) \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. Il gruppo degli automorfismi di rivestimento è isomorfo a $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, dato dalle trasformazioni

$$S^1 \to S^1, \quad (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \mapsto (\cos 2\pi(t + x), \sin 2\pi(t + x)), \quad x \in \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}.$$

(b) $X = C = S^1 \times \mathbf{R}$, $x_0 = (1,0) \in X$; poiché X è omotopicamente equivalente a S^1, ha gruppo fondamentale $\Pi_1(X,x_0) \cong \mathbf{Z}$ ed anche in questo caso i rivestimenti di X sono parametrizzati dagli interi non negativi. Cardinalità della fibra e struttura del gruppo degli automorfismi di rivestimento, che dipendono solo da $\Pi_1(X,x_0)$ ed $H \subset \Pi_1(X,x_0)$, sono come in (a).
Il rivestimento universale $\widehat{X}_0 = \widetilde{X}$ è omeomorfo ad $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$

$$p: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to S^1 \times \mathbf{R}, \quad (t,s) \mapsto ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), s).$$

Gli automorfismi di rivestimento sono dati da

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}, \quad (t,s) \mapsto (t+k, s), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Per $m > 0$ il rivestimento è dato da

$$p: S^1 \times \mathbf{R} \to S^1 \times \mathbf{R}, \quad ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), s) \mapsto ((\cos 2\pi mt, \sin 2\pi mt), s), \quad m \in \mathbf{Z}_{>0}$$

e gli automorfismi di rivestimento sono dati da

$$S^1 \times \mathbf{R} \to S^1 \times \mathbf{R}, \quad ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), s) \mapsto ((\cos 2\pi(t+x), \sin 2\pi(t+x)), s), \quad x \in \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}.$$

(c) $X = T = S^1 \times S^1 = \{((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)),\ t,s \in [0,1]\}$, $x_0 = (1,1) \in X$, $\Pi_1(X,x_0) \cong \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.
Sia $H \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ un sottogruppo. Scegliendo opportunamente i generatori e_1, e_2 di $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, abbiamo

$$H = m\mathbf{Z}e_1 \times n\mathbf{Z}e_2,$$

per opportuni $n, m \geq 0$ (due vettori $e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sono generatori di $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ se e solo se $\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \pm 1$).
Il rivestimento universale $\widehat{X}_0 = \widetilde{X}$ è omeomorfo ad $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$

$$p: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to S^1 \times S^1, \quad (t,s) \mapsto ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)),$$

e gli automorfismi di rivestimento sono dati da

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}, \quad (t,s) \mapsto (t+k, s+h), \quad k, h \in \mathbf{Z}.$$

Per $mn > 0$ il rivestimento è dato da

$$p: S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1,$$

$$((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)) \mapsto ((\cos 2\pi mt, \sin 2\pi mt), (\cos 2\pi ns, \sin 2\pi ns)), \quad m, n \in \mathbf{Z}_{>0}$$

e gli automorfismi di rivestimento sono dati da

$$S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1,$$

$$((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)) \mapsto ((\cos 2\pi(t+x), \sin 2\pi(t+x)), (\cos 2\pi(s+y), \sin 2\pi(s+y))),$$

$$x \in \mathbf{Z}/m\mathbf{Z},\ y \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}.$$

Siano $m > 0$ ed $n = 0$. Il rivestimento è dato da

$$p\colon S^1 \times \mathbf{R} \to S^1 \times S^1,$$

$$((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), s) \mapsto ((\cos 2\pi mt, \sin 2\pi mt), (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)), \quad m \in \mathbf{Z}_{>0}$$

e gli automorfismi di rivestimento sono dati da

$$S^1 \times \mathbf{R} \to S^1 \times \mathbf{R},$$

$$((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), s) \mapsto ((\cos 2\pi(t+x), \sin 2\pi(t+x)), s)), \quad x \in \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}.$$

3. *Determinare tutti i rivestimenti di $\mathbf{R}P^n$, per $n \geq 1$. Verificare che sono normali e per ognuno di essi determinare il gruppo degli automorfismi di rivestimento (deck-transformations).*

Sol.: La proiezione al quoziente rispetto alla relazione che identifica punti antipodali $p\colon S^n \to \mathbf{R}P^n$ determina un rivestimento a due fogli di $\mathbf{R}P^n$.
- Per $n \geq 2$, la sfera è semplicemente connessa e dunque coincide col rivestimento universale di $\mathbf{R}P^n$. Poiché $\Pi_1(\mathbf{R}P^n) \cong \mathbf{Z}_2$, questo è anche l'unico rivestimento non banale di $\mathbf{R}P^n$ (vedi Osservazione).
- Per $n = 1$, abbiamo $\mathbf{R}P^1 \cong S^1$ e siamo nel caso dell'esercizio 1. Il rivestimento $p\colon S^1 \to \mathbf{R}P^1$ induce l'omomorfismo $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $\gamma \mapsto 2\gamma$ e corrisponde al sottogruppo $2\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}$.

Osservazione. Per $n > 1$, lo spazio proiettivo reale $\mathbf{RP}^n$ è una varietà connessa non orientabile e la sfera S^n è un rivestimento a due fogli di $\mathbf{RP}^n$ *orientabile.* È un fatto generale che ogni varietà connessa non orientabile M ammette un rivestimento a due fogli *orientabile.*

5. *Determinare il rivestimento universale di $\mathbf{C}^*$. Determinare gli automorfismi del rivestimento $p\colon \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$, dato da $z \mapsto z^n$.*

Sol.: Il rivestimento universale di $\mathbf{C}^*$ è dato da

$$\exp\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*, \quad z \mapsto e^z.$$

Nell'esercizio 7 del foglio 4 abbiamo dimostrato che si tratta di un rivestimento con fibra infinita e abbiamo descritto esplicitamente un ricoprimento trivializzante di $\mathbf{C}^*$. Poiché $\mathbf{C}$ è semplicemente connesso, si tratta proprio del rivestimento universale di $\mathbf{C}^*$.
Consideriamo adesso il rivestimento $p\colon \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^*$, dato da $z \mapsto z^n$, e fissiamo $x_0 = \tilde{x}_0 = 1$. L'omomorfismo indotto $p_*\colon \Pi_1(\mathbf{C}^*, \tilde{x}_0) \to \Pi_1(\mathbf{C}^*, x_0)$ manda un generatore $[\gamma] \in \Pi_1(\mathbf{C}^*, \tilde{x}_0)$ (ad esempio $[\gamma]$=la classe del cerchio unitario $\{|z| = 1\} \subset \mathbf{C}$, percorso una volta in senso orario) in $n[\gamma] \in \Pi_1(\mathbf{C}^*, x_0)$, cioè è l'omomorfismo $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $z \mapsto nz$. Il gruppo degli automorfismi di rivestimento è isomorfo a $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$: gli automorfismi sono della forma

$$C^* \to \mathbf{C}^*, \quad z \mapsto \lambda z, \qquad \lambda^n = 1,$$

cioè sono parametrizzati dalle radici ennesime dell'unità.

4. *Hatcher, esercizio 16, pag. 80.*
   (a) *Usare il risultato dell'esercizio per dimostrare che il rivestimento semplicemente connesso di uno spazio X è un rivestimento di ogni altro rivestimento di X (da cui il nome di rivestimento universale).*
   (b) *Sia X uno spazio che ammette un rivestimento universale. Se (X_1, p_1) è un rivestimento di X e (X_2, p_2) è un rivestimento di X_1, allora (X_2, p_1p_2) è un rivestimento di X.*

Sol.: **Hatcher, esercizio 16, pag. 80.** L'esercizio è il Lemma 6.7, pag. 131 del libro di Massey. Date mappe

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[dl, "q"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

che soddisfano $q \circ \phi = p$, con $p: X \to Z$ e $q: Y \to Z$ rivestimenti, allora anche $\phi: X \to Y$ è un rivestimento. Per semplicità assumiamo X, Y, Z connesi per archi. Il punto cruciale è dimostrare che la mappa ϕ è *suriettiva* e questo fatto è conseguenza dell'*esistenza e unicità del sollevamento* etc....

- Sia $y \in Y$. Mostriamo che esiste $x \in X$ tale che $\phi(x) = y$.
Fissiamo $x_0 \in X$ e definiamo $y_0 = \phi(x_0) \in Y$ e $z_0 = q(x_0) = p(\phi(x_0)) \in Z$.
Poiché Y è connesso per archi, esiste un cammino γ in Y che congiunge y_0 ed y. La composizione $q \circ \gamma$ è un cammino in Z che congiunge z_0 e $q(y)$.
Poiché $p: X \to Z$ è un rivestimento, esiste un unico sollevamento di $q \circ \gamma$ ad un cammino $\widetilde{q \circ \gamma}$ in X di punto iniziale $x_0 \in p^{-1}(z_0)$. Dalla relazione

$$p(\widetilde{q \circ \gamma}) = q(\phi(\widetilde{q \circ \gamma})) = q \circ \gamma$$

abbiamo che

$$\phi(\widetilde{q \circ \gamma}) \qquad \text{e} \qquad \gamma$$

sono due sollevamenti di $q \circ \gamma$ ad un cammino in Y, con lo stesso punto iniziale y_0. Di conseguenza hanno anche lo stesso punto finale

$$y = \gamma(1) = \phi(\widetilde{q \circ \gamma}(1)).$$

In altre parole $y = \phi(x)$, con $x = \widetilde{q \circ \gamma}(1)$ e ϕ è suriettiva.
- Poiché $p: X \to Z$ e $q: Y \to Z$ sono rivestimenti, esiste un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X che è un ricoprimento "trivializzante" per entrambi: sia $z \in Z$ e siano A e A' intorni aperti di z tali che

$$p^{-1}(A) = \bigsqcup_j B_j \subset X \qquad\qquad q^{-1}(A') = \bigsqcup_k B'_k \subset Y$$

e

$$p|B_j: B_j \to A, \qquad\qquad q|B'_k: B'_k \to A'$$

omoeomorfismi. Allora U:=la componente connessa di $A \cap A'$ che contiene z è un intorno di z con le proprietà richieste.

- Sia y un elemento qualunque di Y. Verifichiamo che esiste un intorno aperto V di y tale che

$$\phi^{-1}(V) = \bigsqcup W_j, \quad \& \quad \phi|W_j: W_j \to V \quad \text{omoeomorfismo.}$$

Sia $z = q(y) \in Z$. Dalla relazione $p = q \circ \phi$ segue che

$$\phi^{-1}(y) \subset p^{-1}(z).$$

Sia U un intorno aperto di z nel ricoprimento $\mathcal{U}$ definito sopra e sia $V \subset q^{-1}(U)$ la componente connessa che contiene y. Abbiamo che $p^{-1}(U) = \bigsqcup W_k$ e $\phi^{-1}(V)$ è unione disgiunta degli aperti W_k per cui $W_k \cap \phi^{-1}(y) \neq \emptyset$.

Verifichiamo che se $p: X \to Z$ è normale, allora anche $\phi: X \to Y$ è normale. In astratto la situazione è la seguente: dati gli omomorfismi *iniettivi* di gruppi

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"] & G_2 \arrow[dl, "q"] \\ G & \end{tikzcd}$$

verifichiamo che $p(G_1)$ normale in G implica $\phi(G_1)$ normale in G_2.
Dati $\gamma \in G_2$ e $\phi(g_1) \in \phi(G_1)$, dobbiamo verificare che $\gamma\phi(g_1)\gamma^{-1} \in \phi(G_1)$. Applicando q troviamo

$$q(\gamma\phi(g_1)\gamma^{-1}) = q(\gamma)q(\phi(g_1))q(\gamma)^{-1} \in q(\gamma)q\phi(G_1)q(\gamma)^{-1} \in q\phi(G_1),$$

perché $q\phi(G_1) = p(G_1)$ e $p(G_1)$ è normale in G. In altre parole, esiste $\tilde{g}_1 \in G_1$, tale che

$$q(\gamma\phi(g_1)\gamma^{-1}) = q\phi(\tilde{g}_1).$$

Poiché q è iniettiva, ne segue che $\gamma\phi(g_1)\gamma^{-1} = \phi(\tilde{g}_1) \in \phi(G_1)$, e $\phi(G_1)$ è normale in G_2, come richiesto.

(a) Supponiamo di avere delle mappe continue

$$\begin{tikzcd} & (\widehat{X}, \hat{x}_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[r, "f"] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

fra spazi topologici, con $f(y_0) = p(\hat{x}_0)$. Allora esiste una mappa $\hat{f}: (Y, y_0) \to (\widehat{X}, \hat{x}_0)$ che fa commutare il diagramma se e solo se $f_*(\Pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\Pi_1(\widehat{X}, \hat{x}_0))$ (vedi Hatcher, Prop.1.33, pag.61-62). Questo è sempre il caso se $\Pi_1(Y, y_0) = 1$.

Se applichiamo questo fatto al caso di $(Y, y_0) = (\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$, dove $\widetilde{X}$ è il rivestimento universale di X e $\tilde{x}_0 \in f^{-1}(p(\hat{x}_0))$, ci poniamo nelle ipotesi del punto precedente, e otteniamo una mappa di rivestimento dal rivestimento universale ad un rivestimento qualsiasi di X.

(b) Ricordiamo che il rivestimento universale di X è anche un rivestimento di X_2. Dopodiché l'enunciato segue dal seguente fatto generale applicato alla composizione $p_1 p_2 \colon X_2 \to X$: date mappe

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & Y \arrow[dl, "r"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

con $p \colon X \to Y$ e $q \colon X \to Z$ rivestimenti, allora anche $r \colon Y \to Z$ è un rivestimento.
- Poiché $r \circ q = p$, anche r è suriettiva. Inoltre dato $z \in Z$, vale

$$q(p^{-1}(z)) = r^{-1}(z) :$$

$\subset$: dato $x \in p^{-1}(z)$, abbiamo $r(q(x)) = p(x) = z$;
$\supset$: sia $y \in r^{-1}(z)$. Da q suriettiva segue che esiste $x \in X$ tale che $q(x) = y$. Abbiamo ora $p(x) = r(q(x)) = r(y) = z$.
In altre parole, l'insieme $p^{-1}(z)$ si decompone come

$$p^{-1}(z) = \bigsqcup_{y \in r^{-1}(z)} q^{-1}(y).$$

- Esistono un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_j\}$ di Z e $\mathcal{V} = \{V_k\}$ di Y tali che:
dati $z \in U_z \in \mathcal{U}$, $y \in r^{-1}(z)$ e $y \in V_y \in \mathcal{V}$ valgono

$$p^{-1}(U_z) = \bigsqcup W_j, \qquad q^{-1}(V_y) = p^{-1}(U_z) \cap q^{-1}(y).$$

Allora

$$r^{-1}(U) = \bigsqcup_{y \in r^{-1}(z)} V_y$$

ed $r|V_y \colon V_y \to U_z$ è un omoeomorfismo, in quanto $V_y \cong W_j$, per un qualche j, tramite q, e a sua volta $W_j \cong U_z$ tramite p.

6. (Massey, es. 2.4, pag.123. (*non immediato*))*Siano X e Y spazi connessi per archi, localmente connessi per archi, X compatto di Hausdorff. Sia $f\colon X \to Y$ un omeomorfismo locale. Allora $f\colon X \to Y$ è un rivestimento.*

Sol. Osserviamo che dalle ipotesi segue che f è continua e aperta, Y è di Hausdorff (se $f\colon X \to Y$ è un omeomorfismo locale, X è di Hausdorff se e solo se Y è di Hausdorff), f è propria (C compatto in Y è chiuso, $f^{-1}(C)$ è chiuso in un compatto e quindi compatto).
Sia $y \in Y$ un punto arbitrario. Da f propria segue che la controimmagine $f^{-1}(y)$ consiste in un numero finito di punti $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset X$ (possibilmente $f^{-1}(y) = \emptyset$).
Inoltre, da f omeomorfismo locale ed X Hausdorff segue che esistono $U_1, \ldots, U_k$ intorni aperti disgiunti di $x_1, \ldots, x_k$ tali che $f|U_i\colon U_i \to f(U_i)$ è un omeomorfismo sull'immagine, per $i = 1, \ldots, k$.
Definiamo

$$W := X \setminus \{U_1 \sqcup \ldots \sqcup U_k\}, \qquad V := f(U_1) \cap \ldots \cap f(U_k) \setminus \{f(W)\}.$$

Allora

$$f^{-1}(V) = U_1 \sqcup \ldots \sqcup U_k.$$

Data l'arbitrarietà del punto y si ha che $f\colon X \to Y$ è un rivestimento. Poiché Y è connesso, la cardinalità della controimmagine di un punto, che è localmente costante, è costante, f è suriettiva ed Y è compatto.

7. *Hatcher, esercizio 17, pag. 80.*

Sol. Sia (X, x_0) uno spazio connesso per archi, localmente connesso per archi, localmente semplicemente connesso (cioè che ammette rivestimento universale). Supponiamo che abbia gruppo fondamentale $\Pi_1(X, x_0) \cong G$. Se $N \subset G$ è un sottogruppo normale, esiste un rivestimento

$$p\colon (\widehat{X}, \hat{x}_0) \to (X, x_0), \qquad \Pi_1(\widehat{X}, \hat{x}_0) \cong N,$$

con gruppo di "deck-transformations"

$$G(\widehat{X}) \cong G/N.$$

Il problema è dunque costruire X.

• Per ogni gruppo (discreto) G esiste un CW-complesso X con gruppo fondamentale G: una 0-cella, tante 1-celle quanti sono i generatori di G, tante due celle quante sono le relazioni di G.
Se il gruppo G è finitamente generato, il CW-complesso X è finito.

N.B.: Un CW-complesso è localmente contrattile, in particolare localmente connesso per archi e localmente semplicemente connesso; inoltre se è connesso, è anche connesso per archi (vedi Hatcher, Proposizione A4, pag. 523).

8. *Sia X uno spazio che ammette rivestimento universale e sia $x_0 \in X$. Siano $H \subset K$ sottogruppi di $\Pi_1(X, x_0)$ e siano*

$$p_H\colon (\widetilde{X}_H, \tilde{x}_H) \to (X, x_0), \qquad p_K\colon (\widetilde{X}_K, \tilde{x}_K) \to (X, x_0)$$

i rivestimenti che soddisfano rispettivamente le condizioni

$$p_{H*}\,\Pi_1(\widetilde{X}_H, \tilde{x}_H) = H, \qquad p_{K*}\,\Pi_1(\widetilde{X}_K, \tilde{x}_K) = K.$$

Allora esiste un'unica mappa continua

$$p_{HK}\colon (\widetilde{X}_H, \tilde{x}_H) \to (\widetilde{X}_K, \tilde{x}_K) \qquad (*)$$

compatibile con le proiezioni su X. La mappa p_{HK} è una mappa di rivestimento. Questo dice che alle inclusioni di gruppi

$$\{e\} \subset H \subset K \subset G$$

corrispondono rivestimenti

$$(\widetilde{X}, \tilde{x}) \to (\widetilde{X}_H, \tilde{x}_H) \to (\widetilde{X}_K, \tilde{x}_K) \to (X, x_0).$$

Se H è un sottogruppo normale di K, allora (*) è un rivestimento normale con gruppo di automorfismi isomorfo a K/H. (Suggerimento: Se $(\widetilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x_0)$ è il rivestimento universale, allora $X \cong \widetilde{X}/G$, con $G \cong \Pi_1(X, x_0)$ gruppo degli automorfismi di rivestimento).

Sol.: Applichiamo la Prop.1.33 di Hatcher, pag.61-62 alle mappe

$$\begin{tikzcd} & (\widetilde{X}_K, \tilde{x}_K) \arrow[d, "p_K"] \\ (\widetilde{X}_H, x_H) \arrow[r, "p_H"] & (X, x_0). \end{tikzcd}$$

Le ipotesi $H \subset K \subset \Pi_1(X, x_0)$ ci assicurano che esiste un'unica mappa continua

$$p_{HK}\colon (\widetilde{X}_H, \tilde{x}_H) \to (\widetilde{X}_K, \tilde{x}_K) \qquad (*)$$

compatibile con le proiezioni su X. Inoltre la mappa p_{HK} è di rivestimento (vedi Es.4, qui sopra).

Dato un rivestimento normale $p\colon (\widehat{X}, \hat{x}) \to (X, x_0)$, con $p_*\Pi_1(\widehat{X}, \hat{x})$ normale in $\Pi_1(X, x_0)$, vale $X = \widehat{X}/G$, con $G = \Pi_1(X, x_0)/p_*\Pi_1(\widehat{X}, \hat{x})$, etc... Il rivestimento universale $(\widetilde{X}, \tilde{x})$ di uno spazio (X, x_0) è anche rivestimento universale di ogni altro rivestimento di (X, x_0) ed è sempre normale. Dunque $\widetilde{X}_H = \widetilde{X}/H$ e $\widetilde{X}_K = \widetilde{X}/K$. Poiché $H \subset K$, c'è una mappa canonica

$$\widetilde{X}/H \longrightarrow \widetilde{X}/K.$$

Se H è normale in K, allora $G = K/H$ è un gruppo e

$$\widetilde{X}/K \cong \widetilde{X}/H \,/\, K/H.$$

In altre parole la mappa (*)

$$p_{HK}\colon (\widetilde{X}/H, \tilde{x}_H) \to (\widetilde{X}/K, \tilde{x}_K)$$

definisce un rivestimento normale con deck-transformations $G = K/H$.